C. Hort

München 1979

Nonstandard Maße und Integrale

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von Christian Hort
aus Holzkirchen

eingereicht im September 1978

Meiner Oma gewidmet .

1. Referent: Prof. Dr. H. Osswald
Korreferent: Prof. Dr. U. Oppel

Tag der mündlichen Prüfung: 8. März 1979

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung

Nonstandardmodelle wurden bereits in verschiedenen Teilen der Mathematik eingesetzt: als technisches Hilfsmittel. Denn häufig lassen sich Aussagen in einem Nonstandardmodell prägnanter fassen und eleganter beweisen als äquivalente Aussagen in einem Standardmodell. Nach diesem Prinzip ist z.B. eine Nonstandard-Analysis bei Robinson, Osswald u.a. (vgl. /31/, /28/) oder eine Nonstandard-Topologie bei Luxemburg (/23/) entwickelt. Auch in der Maßtheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie sind einzelne klassische Sätze auf diese Weise recht elegant bewiesen worden (vgl. /17/, /19/, /31/, /36/); die Maße von Loeb (/22/) stellen eine Art Systematisierung in diese Richtung dar.

Allerdings ist aus der Tatsache, daß Nonstandard-Theorien konservative Erweiterungen der entsprechenden Standard-Theorien sind, klar ersichtlich, daß derartige Ansätze hauptsächlich stilistische, didaktische oder beweistechnische Zielsetzung haben, aber nichts über eine klassische Theorie Hinausgehendes hervorbringen. Anders sieht es aus, wenn man Nonstandard-Objekte nicht nur nach den Spielregeln der Modelltheorie in der internen Sprache und mit dem internen Gültigkeitsbegriff betrachtet, sondern von außen in der üblichen Metasprache mit dem universalen Gültigkeitsbegriff behandelt. Wenn man also auf den irgendwie erhaltenen Nonstandard-Objektbereichen "normale" Mathematik betreibt. Dabei ist es erforderlich, daß explizite Konstruktionen zu den Nonstandard-Objekten führen. Hierbei und auch bei der Sicherstellung gewisser innerer Eigenschaften wie etwa Ordnung, Saturiertheit u.ä. sind die Ergebnisse der

Modelltheorie sehr nützlich. Es sei aber darauf hingewiesen, daß man auch ohne jedwede Modelltheorie oder Metamathematik dieselben Objektbereiche erhalten und auf ihnen arbeiten könnte (rein algebraischer Zugang).

Eine Nonstandardtechnik in diesem Sinne erscheint gerade im Bereich der Maßtheorie vielversprechend. Die Geschichte der Maßtheorie (und der Wahrscheinlichkeitstheorie) zeigt, mit welchen Grundlagenunsicherheiten bezüglich eines adäquaten Maßbegriffes man zu kämpfen hatte. Die diversen historischen sog. "Maßprobleme" (vgl. /1/, /26/, /35/) und vermeintlichen Paradoxien belegen dies aus mathematischer Sicht, die Interpretationsschwierigkeiten für Wahrscheinlichkeiten (a priori vs. a posteriori, z.B. beim idealisierten Pfeilwurf auf das Einheitsintervall, vgl. /5/) mehr aus philosophischer Sicht. Es gibt denn auch neben der klassischen (σ-additiven) Maßtheorie, die in den reellen Zahlen mißt, verschiedene Ansätze,mit anderen Maßwertebereichen zu messen, begonnen mit der Pionierarbeit von Hahn 1907 (/13/) bis zur sehr allgemeinen Monographie von Sion 1973 (/33/; vgl. außerdem /27/, /37/, /38/). Vor allem die Archimedität klassischer Maße und das damit verbundene Auftreten des Maßwerts ∞ wird oft als Hindernis empfunden.

Nonstandard-reelle Zahlen wurden bislang wenig für Maßwertebereiche verwendet: Die erste einschlägige Arbeit von Bernstein/Wattenberg (/5/) datiert von 1969; sie wurde von Bernstein und Loeb (/6/, /7/) 1974 auf eine Integrationstheorie hin erweitert. Einige Verbesserungen und Verallgemeinerungen fügte Shorb (/32/) 1975 an. Bei Skala (/34/) zeigt sich ein typisches Anwendungsfeld: er verwendet nonstan-

dard-reellwertige Nutzenfunktionen (Mittelbildung, dem Integralbegriff verwandt).

Die vorliegende Arbeit stellt hauptsächlich eine systematische Weiterentwicklung der Ergebnisse von Bernstein und Shorb in einem allgemeineren Rahmen dar. Wichtigste Anwendung ist auch hier eine "Nonstandard-Erweiterung" des Lebesgue-Maßes bzw. -Integrals auf $\mathbb{R}$.
Zunächst wird ein (vom klassischen verschiedener) Maßbegriff definiert: Unsere Maße sind nur endlich additiv. Dies liegt daran, daß sie o.E. nonstandard-reellwertig sind, und daß sich σ-Additivität und Nichtarchimedität ohnehin nicht vereinbaren lassen. Außerdem wäre die Ulamsche Negativaussage (/35/) für unsere Zielsetzung hinderlich.
In 1.3 definieren wir Feinheit (= "Trennschärfe") von Maßen und zeigen, daß es immer feinste R-invariante Maße gibt, wobei R eine Relation auf dem Maßbereich ist, die bestimmte Vorgaben für Maßgleichheit ausdrückt (z.B. Translationsinvarianz). Welche Folgen eine solche Vorgabe hat, d.h. welche Mengen unter jedem R-invarianten Maß den gleichen Wert erhalten müssen, wird für eine bestimmte Klasse von Relationen charakterisiert (1.4). In der Anwendung auf eine Erweiterung des Lebesgue-Maßes liefert diese Charakterisierung, daß das Lebesgue-Maß echt verfeinert werden kann (1.6). Dies bedeutet insbesondere eine Aussage zur Feinstruktur von Lebesgue-Nullmengen: Es gibt Nullmengen, die es bereits aufgrund der Additivität und Translationsinvarianz sein müssen, und andere, die es nur sind, weil die Struktur und Kardinalität von $\mathbb{R}$ nicht ausreichen, sie von den anderen Nullmengen zu unterscheiden (Satz 1.5.5).
In 1.7 stellen wir unter Verwendung der Ergebnisse von Lightstone/Robinson (/21/) einen abgeschwächten

σ-Additivitätsbegriff für unsere Maße auf und zeigen, daß man Maße konstruieren kann, auf die er zutrifft. Dieses Kapitel soll eine Verbindung zur klassischen Maßtheorie andeuten.
Teil 2. behandelt Integrale. Über eine Ultralimeskonstruktion erhalten wir ein fast translationsinvariantes Integral auf $\mathbb{R}$, das das Lebesgue-Integral "fortsetzt". Im wesentlichen ist dies das Ergebnis von Shorb und Bernstein; allerdings mit einer völlig verschiedenen, eher an Banach (/1/) angelehnten Methode; eine von Shorb ausdrücklich geforderte, aber nicht gelöste Erweiterung konnte dabei erzielt werden. (Die bei Shorb noch behandelte "vollständige Additivität" besteht innerhalb des Nonstandardmodells immer (interne Eigenschaft!), ist aber für unsere Betrachtungsweise "von außen" bedeutungslos.) Eine weitere von Shorb aufgestellte Vermutung bezüglich proportionaler Translationsinvarianz wird in 2.3 unter bestimmten Voraussetzungen geklärt.
Im letzten Kapitel behandeln wir die Konstruktion nonstandard-reellwertiger positiver Linearformen auf partiell geordneten Vektorräumen, da darin das Wesentliche bei der Konstruktion bestimmter invarianter Integrale liegt.

Alle ausgeführten Beweise stammen aus eigener Arbeit. Daß sie neu sind, verweist auf die Neuartigkeit und Unberührtheit des Gebiets.

Danken möchte ich Herrn Professor Horst Osswald für seine kameradschaftliche Betreuung sowie Herrn Dipl.-Math. Bernhard Hönig für zahlreiche wertvolle Gespräche.

Notationen und Konventionen

Wir verwenden die Notationen der Nonstandard-Analysis wie in /28/. Bei Verwendung des Operators ⋆ sind immer echte Erweiterungen über vollen Modellen gemeint. Die Schreibweise ist ungenau, insofern mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ sowohl Typentheoriemodelle der Theorie der reellen Zahlen als auch die reelle (Nonstandard-)Zahlengerade selbst gemeint ist. Manchmal bezeichnen wir Nonstandard-Modelle über $\mathbb{R}$ auch mit $\mathbb{R}'$, $\mathbb{R}_1$ u.ä.
$\succ$ bedeutet elementare Erweiterung.
st(x) bezeichnet den Standardteil einer Nonstandard-Zahl x.
Nonstandard-Analysis und Modelltheorie werden ohne weitere Einführung als Werkzeug benützt (vgl. /10/, /28/); ebenso manche algebraischen und topologischen Eigenschaften der Nonstandard-Zahlengeraden (vgl. /18/).

Bei disjunkter Vereinigung von Mengen schreiben wir $A + B$ bzw. ΣA_i; bei echter Differenz: $A - B$.
$A + t$ steht für $\{x+t \mid x \in A\}$.
Zu einer Familie von Mengen $(M_i)(i \in I)$ sind die Atome als maximale Mengen A mit der Eigenschaft:
$x,y \in A \iff (\text{für alle } i \in I: x \in M_i \iff y \in M_i)$ definiert.
Atome sind paarweise disjunkt. Ist I endlich, so gibt es nur endlich viele.
Für die Menge $\{f(x) \mid x \in X\}$ schreiben wir auch $f(X)$, wenn keine Mißverständnisse möglich sind.

1. M A S Z E

1.1 Allgemeines

Ehe wir unseren Maßbegriff definieren, sollen kurz die dabei zugrundegelegten Vorstellungen und Forderungen diskutiert werden.

"Messen" ist eine Zuordnung von Maßwerten an Mengen (Quantitäten), die es ermöglicht, sie in ihrer "Größe" zu vergleichen ("Vergleichsprinzip"). Dies erfordert bereits eine Ordnung auf dem Bereich der Maßwerte. In natürlicher Weise soll diese Ordnung mit der Teilmengenbeziehung verträglich sein, insbesondere einen kleinsten Maßwert haben, nämlich den für die leere Menge. Eine Verallgemeinerung dahingehend, daß die Ordnung nicht vollständig zu sein brauche, also gewisse Mengen unvergleichbar bleiben, ist wohl nicht sinnvoll, da man dann die vollständig geordneten Teilsysteme für sich betrachten kann.

Eine weitere natürliche Forderung ist das "Bestimmtheitsprinzip": Zerlegt man eine Menge in zwei Teile, so sei sowohl der Maßwert der Gesamtmenge durch die Werte der beiden Teilmengen, als auch der Wert einer Teilmenge durch die Werte der Gesamtmenge und der anderen Teilmenge bestimmt. Dieses Prinzip entspricht zweifellos jeder anschaulichen Vorstellung vom Messen, zwingt dem Bereich der Maßwerte aber eine funktionale Struktur auf:

$$\mu(A \cup B) = \phi(\mu(A), \mu(B))$$

$$\mu(A) = \psi(\mu(A \cup B), \mu(B))$$

Dabei seien A und B disjunkt; μ sei die Zuordnung der Maßwerte.

Aus dem Prinzip folgt, daß ϕ kommutativ und assoziativ ist.

$\phi(\phi(\mu(A), \mu(B)), \mu(C)) = \phi(\mu(A \cup B), \mu(C)) =$
$\mu(A \cup B \cup C) = \phi(\mu(A), \phi(\mu(B), \mu(C)))$
Außerdem ist $\psi(\phi(\mu(A), \mu(B)), \mu(B)) = \mu(A)$,
also ψ die inverse Operation zu ϕ.
Schreiben wir statt ϕ und ψ jetzt "+" und "-" in Infixnotation, so liegt die Einbettung des Maßwertebereichs in eine abelsche Gruppe nahe, deren neutrales Element das Maß der leeren Menge ist. Die durch das Vergleichsprinzip eingeführte Ordnung ist mit der Gruppenstruktur verträglich: Maßwerte sind 0 oder positiv.

Maße der klassischen Maßtheorie erfüllen das Bestimmtheitsprinzip im allgemeinen nicht (z.B. das Lebesguemaß). Das liegt wohl nicht daran, daß man das Prinzip nicht für "natürlich" und erstrebenswert gehalten hätte; vielmehr ist seine Realisierung in vielen Fällen schlechthin unmöglich, wenn nur $\mathbb{R}$ oder $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (keine Gruppe!) als Maßwertebereich zur Verfügung steht. "Größen" von Mengen sind auf einer archimedischen Skala eben nur schwer unterzubringen.

Die beiden genannten Prinzipien führen ohne weitere Willkür zur folgenden Definition des Maßes. Die für die Definition praktische Reichhaltigkeit des Definitionsbereiches des Maßes stellen wir durch die Forderung nach "schwacher Abgeschlossenheit" sicher.

<u>Definition (1.1.1):</u>
Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Mengen.
$\mathfrak{K}$ heißt schwach abgeschlossen, wenn gilt:
i) $\emptyset \in \mathfrak{K}$.
ii) $A, B \in \mathfrak{K}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{K}$.
iii) $A, B \in \mathfrak{K}, A \subset B \Rightarrow B - A \in \mathfrak{K}$.

<u>Definition (1.1.2):</u>

Sei $\mathfrak{K}$ eine schwach abgeschlossene Klasse von Mengen.

Ein Maß auf $\mathfrak{K}$ ist eine Abbildung μ von $\mathfrak{K}$ auf eine angeordnete abelsche Gruppe G, für die gilt:

i) $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$ für A,B disjunkt $\in \mathfrak{K}$.

ii) $\mu \geqq 0$.

Folgerungen:

1. $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) = 0$.
2. A, B $\in \mathfrak{K}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A)$
   $\Rightarrow \mu(A) \leqq \mu(B)$.

Beispiele:

1. Auf der Klasse aller endlichen Mengen ist card: $M \mapsto |M|$ ein Maß.
   Auf beliebigen Mengenklassen ist card im allgemeinen kein Maß!
2. Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ ein klassischer Maßraum, so ist für $\mathfrak{L} := \{A \in \mathfrak{A} \mid \lambda(A) < \infty\}$ $\lambda|_{\mathfrak{L}}$ ein Maß. Insbesondere ist jedes endliche klassische Maß ein Maß in unserem Sinn.

1.2 $\mathbb{R}^\star$ als Maßwertebereich

Maße nehmen -laut Definition - Werte in angeordneten abelschen Gruppen. Es soll jetzt gezeigt werden, daß man ohne Einschränkung die Maßwerte aus Nonstandard-Erweiterungen der reellen Zahlen nehmen kann.

Satz (1.2.1):
Jede angeordnete abelsche Gruppe läßt sich in eine geeignete Nonstandarderweiterung der reellen Zahlen einbetten (als angeordnete Gruppe!).

Beweis:
Sei G' eine angeordnete abelsche Gruppe. Dann kann G' in eine teilbare abelsche Gruppe G eingebettet werden (vgl. /34/,p. 93).
Sei κ Kardinalzahl, $\kappa > |G|$.
$\mathbb{R}^\star \succ \mathbb{R}$ sei ein κ-saturiertes Modell von $\mathbb{R}$, also insbesondere ein η_κ .
Weil G teilbar ist, läßt es sich darstellen als Vereinigung der aufsteigenden Folge (G_α) $(\alpha \in \kappa)$, wobei:

$$G_0 := \mathbb{Q} \;;$$
$$G_{\alpha+1} := G_\alpha \oplus T_\alpha \quad \text{mit } T_\alpha \cong \mathbb{Q} \;;$$
$$G_\gamma := \coprod_{\alpha\in\gamma} T_\alpha \quad \text{für } \lim(\gamma).$$

Durch transfinite Induktion definieren wir Einbettungen f_α von $G_\alpha \to \mathbb{R}^\star$.

$f_0 : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \prec \mathbb{R}^\star$.
f_α sei definiert;
sei $x \in G_{\alpha+1} - G_\alpha$, $x \neq 0$.
$A := G_\alpha \cap \{y \mid y < x\}$, $B := G_\alpha \cap \{y \mid y > x\}$;
es gilt: $f_\alpha(A) < f_\alpha(B)$ und $\kappa > |f_\alpha(A)|, |f_\alpha(B)|$.
Weil $\mathbb{R}^\star$ η_κ, gibt es ein $y \in \mathbb{R}^\star$ mit $f_\alpha(A) < y < f_\alpha(B)$.
Jedes $z \in G_{\alpha+1}$ läßt sich eindeutig als $\zeta \cdot x + u$ schreiben mit $\zeta \in \mathbb{Q}$ und $u \in G_\alpha$.

Definiere $f_{\alpha+1}(z) := \zeta \cdot y + f_\alpha(u)$.

Mit Induktionsvoraussetzung folgt:

1. $f_{\alpha+1}$ ist $\mathbb{Q}$-Vektorraum-Homomorphismus; denn
   $f_{\alpha+1}(z+\lambda \cdot z') = f_{\alpha+1}(\zeta \cdot x+u + \lambda \cdot \zeta' \cdot x+\lambda \cdot u') =$
   $(\zeta+\lambda \cdot \zeta') \cdot y + f_\alpha(u+\lambda \cdot u') = \zeta \cdot y + f_\alpha(u) +$
   $\lambda(\zeta' \cdot y + f_\alpha(u')) = f_{\alpha+1}(z) + \lambda \cdot f_{\alpha+1}(z')$.

2. $f_{\alpha+1}$ ist ordnungserhaltend; denn

sei $u = \lambda \cdot x+z > 0$ (bzw. <0) mit $\lambda > 0$.

$\Rightarrow x \underset{(<)}{>} -z/\lambda \Rightarrow$ (nach Def.) $-z/\lambda \in A$ (bzw. $\in B$)

$\Rightarrow y \underset{(<)}{>} -f_\alpha(z/\lambda) = -1/\lambda \cdot f_\alpha(z)$

$\Rightarrow \lambda \cdot y + f_\alpha(z) \underset{(<)}{>} 0$, also $f_{\alpha+1}(u) \underset{(<)}{>} 0$.

Weil $f_{\alpha+1}|G_\alpha = f_\alpha$, ist für $\lim(\gamma)$ $f_\gamma := \bigsqcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha$
wieder ein ordnungserhaltender $\mathbb{Q}$-VR-Homomorphismus
von $G_\gamma \to \mathbb{R}^\star$.

Somit ist f_κ die gewünschte Einbettung von G in $\mathbb{R}^\star$.

⌛

Mit dem letzten Satz haben wir also gerechtfertigt, als Maßwerte ausschließlich nonstandard-reelle Zahlen zu verwenden. Daß wir hier gleich die sehr üppige Struktur von $\mathbb{R}^{(\star)}$ heranziehen, liegt einerseits an der Absicht, den klassischen Maßbegriff zu erweitern, d.h. immer die Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^\star$ zur Verfügung zu haben, andererseits an der Zweckmäßigkeit der Körperstruktur besonders beim Integralbegriff.

1.3 Feinheit von Maßen

Definition (1.3.1):

$\mu: \tilde{\mathcal{R}} \to G_1$ und $\nu: \tilde{\mathcal{R}} \to G_2$ seien Maße.

μ heißt feiner als ν ("$\mu >> \nu$") , wenn für $A, B \in \tilde{\mathcal{R}}$, $A \subset B$ und $\nu(A) < \nu(B)$ gilt: $\mu(A) < \mu(B)$.

Bemerkung: Feinheit von Maßen ist eine reflexive und transitive Relation, aber keine Ordnung.

Im folgenden sei $\tilde{\mathcal{R}}$ eine schwach abgeschlossene Menge von Mengen. Diese Einschränkung gegenüber der allgemeinen Definition ist erforderlich, da wir feinste Maße erhalten wollen, Gruppen jedoch immer Mengen sind.

Definition (1.3.2):

Sei R eine Relation auf $\tilde{\mathcal{R}}$.

Ein Maß μ auf $\tilde{\mathcal{R}}$ heißt R-invariant, wenn aus $A\,R\,B$ folgt: $\mu(A) = \mu(B)$.

Satz (1.3.3):

Ist R eine Relation auf $\tilde{\mathcal{R}}$, so gibt es ein feinstes Maß μ auf $\tilde{\mathcal{R}}$, das R-invariant ist; d.h. für alle R-invarianten Maße ν auf $\tilde{\mathcal{R}}$ gilt: $\mu >> \nu$.

Beweis:

Nach Satz (1.2.1) können wir uns auf nonstandard-reellwertige Maße beschränken.

Zu einem Maß μ bezeichne $\lceil\mu\rceil$ die Klasseneinteilung auf $\tilde{\mathcal{R}}$, die durch μ gegeben ist: $A \in \bar{B} \;:\Longleftrightarrow\; \mu(A) = \mu(B)$. $\lceil\mu\rceil \subset \mathfrak{P}(\tilde{\mathcal{R}})$. $\lceil\mu\rceil$ ist mit R verträglich, wenn es zu jedem $A \in \tilde{\mathcal{R}}$ ein $X \in \lceil\mu\rceil$ gibt, so daß $\{B \in \tilde{\mathcal{R}} \mid ARB \text{ oder } BRA\} \subset X$.

$M := \{\ulcorner\mu\urcorner \mid \mu: \mathcal{K} \to \mathbb{R}^{\mu}$ Maß, $\ulcorner\mu\urcorner$ mit R verträglich$\}$

($\mathbb{R}^{\mu}$ bezeichne jeweils eine geeignete Nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{R}$.)

$M \subset \mathcal{P}\mathcal{P}(\mathcal{K})$, also Menge. Zu jedem $\sigma \in M$ sei μ_σ ein Maß $: \mathcal{K} \to \mathbb{R}^{\mu_\sigma}$ mit $\ulcorner\mu_\sigma\urcorner = \sigma$.

Die $\mathbb{R}^{\mu_\sigma}$ besitzen eine gemeinsame Erweiterung $\mathbb{R}'$.

$I := \{\mu_\sigma \mid \sigma \in M\}$, $I \neq \emptyset$, da $0 \in I$.

$\mathcal{L} := \{\hat{\mu} \mid \mu \in I\}$, wobei $\hat{\mu} := \{\nu \in I \mid \nu >> \mu\}$.

$\mathcal{L}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, d.h. zu $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n \in \mathcal{L}$ ist $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{\mu}_i \neq \emptyset$.

Denn zu $\nu_1, \nu_2 \in I$ ist $\nu_1 + \nu_2 : A \mapsto \nu_1(A) + \nu_2(A)$ ein Maß. Für $A, B \in \mathcal{K}$, $A \subset B$ und $\nu_1(A) < \nu_1(B)$ ist $\nu_1(A)+\nu_2(A) < \nu_1(B)+\nu_2(A) \leqq \nu_1(B)+\nu_2(B)$. Somit $\nu_1+\nu_2 >> \nu_1, \nu_2$.

Also $\ulcorner\nu_1+\nu_2\urcorner =: \sigma \in M$ und es gibt $\mu_\sigma \in I$.

Für alle $\nu >> \mu_\sigma$ gilt $\nu >> \nu_1, \nu_2$ und damit $\hat{\mu}_\sigma \subset \hat{\nu}_1 \cap \hat{\nu}_2 \neq \emptyset$.

Es gibt somit einen (freien) Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, der $\mathcal{L}$ erweitert. (frei nur, wenn o.E. alle $\hat{\mu}$ unendlich)

$\mathbb{R}^\star := \mathbb{R}'^{I}/\mathcal{U}$ ist Nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{R}$.

$\mu: \mathcal{K} \to \mathbb{R}^\star$, def. durch $\mu(A) := \overline{(\mu_\sigma(A) \mid \mu_\sigma \in I)}$ ist ein Maß, wie man leicht komponentenweise nachprüft.

$\mu(A) = \mu(B)$ für ARB, da jedes μ_σ R-invariant ist.

Sei jetzt ρ ein beliebiges Maß auf $\mathcal{K}$, das R-invariant ist. Dann ist $\ulcorner\rho\urcorner \in M$, $\mu_{\ulcorner\rho\urcorner} \in I$ und $\mu_{\ulcorner\rho\urcorner} >> \rho$. μ ist also feinstes R-invariantes Maß auf $\mathcal{K}$, da $\hat{\mu}_{\ulcorner\rho\urcorner} \in \mathcal{U}$.

⧖

Folgerungen:

1. Ω sei eine Menge; für $\mathcal{K}$ setzen wir $\mathcal{P}(\Omega)$, für R die leere Menge.

Das aufgrund des Satzes existierende feinste Maß nimmt nur auf der leeren Menge den Wert 0 an.

Denn auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist jedes Maß R-invariant, insbesondere

auch das Dirac-Maß $\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

für jedes $x \in \Omega$.

Weil das feinste Maß μ feiner als jedes δ_x ist, muß $\mu(\{x\}) > 0$ sein. ⌛

2. Der Existenzsatz (1.3.3) kann noch verschärft werden: Es gibt sogar ein feinstes R-invariantes Maß μ, für das gilt:
Wenn es ein R-invariantes Maß ν gibt mit $\nu(A) \neq \nu(B)$, so ist auch $\mu(A) \neq \mu(B)$.
Solch ein μ nennen wir stark feinstes Maß.
Beweis: wie bei Satz(1.3.3), wobei statt der Feinerrelation >> die Beziehung $\nu \gtrdot \mu$: <=>
$A, B \in \mathcal{R}$, $\nu(A) = \nu(B) \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$ verwendet wird.
Der Beweis der endlichen Durchschnittseigenschaft besteht also darin, zu zwei Maßen ν_1, ν_2 ein μ zu finden mit $\nu_1 \lessdot \mu$, $\nu_2 \lessdot \mu$. Dazu gehen wir o.E. davon aus, daß ν_1, ν_2 ihre Werte in einem κ-saturierten $\mathbb{R}^\star$ annehmen, wobei $\kappa \geq |\mathcal{R}|$.
Es gibt dann $\varepsilon, \omega \in \mathbb{R}^\star$, sodaß für alle $A, B \in \mathcal{R}$
$0 < \varepsilon < |\nu_1(A) - \nu_1(B)|$, falls $\nu_1(A) \neq \nu_1(B)$ und $\nu_2(A) < \omega$.
$\nu_2'(A) := \nu_2(A) \cdot \varepsilon/\omega$ ist wieder R-invariant.
$\nu_2' \gtrdot \nu_2$ und $\nu_2' < \varepsilon$.
Setze $\mu := \nu_1 + \nu_2'$. Dann ist auch μ R-invariantes Maß.

a) $\mu \gtrdot \nu_1$;
denn sei $\nu_1(A) < \nu_1(B)$. $\mu(A) = \nu_1(A) + \nu_2'(A) <$
$\nu_1^\bullet(A) + \varepsilon < \nu_1(B) \leq \mu(B)$.

b) $\mu \gtrdot \nu_2$;
denn sei $\nu_1(A) = \nu_1(B)$ und $\nu_2(A) < \nu_2(B)$.
$\Rightarrow \nu_2'(A) < \nu_2'(B) \Rightarrow \mu(A) = \nu_1(A) + \nu_2'(A) <$
$\nu_1(B) + \nu_2'(B) = \mu(B)$. ⌛

Dieses stark feinste Maß trennt also soviel Mengen wie möglich. Allerdings liegen die Maßwerte z.T. willkürlich und bringen kein Größenverhältnis mehr zum Ausdruck.

Eine nette Anwendung stark feinster Maße liefert das Analogon von Folgerung 1. :

$\mathfrak{K} = \mathfrak{P}(\Omega)$, $R = \emptyset$.

Für das stark feinste R-invariante μ gilt dann:

$\mu(A) \neq \mu(B)$ für alle $A, B \subset \Omega$, $A \neq B$.

D.h. μ induziert eine (totale) lineare Ordnung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$, die die Inklusion fortsetzt.

1.4 R-invariante Maße

Der Existenzsatz (1.3.3) für feinste R-invariante Maße gibt uns noch recht wenig Information über die nun tatsächlich erreichbare Feinheit dieser Maße. In diesem Abschnitt sollen Werkzeuge entwickelt werden, mit denen sich die Frage, wie fein man noch messen kann, wenn man von vornherein bestimmte Mengen "gleichgroß" setzen muß, besser anpacken läßt.
Ohne viel Allgemeinheit einzubüßen, werden wir uns dabei auf eine Menge Ω und ihre Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ als Klasse zu messender Mengen beschränken.

Definition (1.4.1):
Ist R eine Relation auf $\mathfrak{P}(\Omega)$, so sei die Relation $\sim(R)$ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ gegeben durch:

$$A \sim(R)\ B \ :\Longleftrightarrow \text{ für alle R-invarianten Maße } \mu \text{ auf } \mathfrak{P}(\Omega) \text{ ist } \mu(A) = \mu(B).$$

Bemerkung: $A \sim(R)\ B \Longleftrightarrow$ für ein stark feinstes Maß μ gilt $\mu(A) = \mu(B)$.

Wenn keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir statt $\sim(R)$ nur $\sim$.

Unser Ziel ist es, eine handlichere Charakterisierung von $\sim$ zu finden; dazu sind die charakteristischen Funktionen $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ recht nützlich.

Definition (1.4.2):
V sei der von den charakteristischen Funktionen über Ω erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum, R eine Relation auf $\mathfrak{P}(\Omega)$. Seien f, g $\in$ V.

$f \sim_1 (R)\ g$:<=> es gibt $A_i R A_i' \subset \Omega$, $\sigma_i \in \{1,-1\}$ $(i \leq n)$,

so daß $f = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i}$

und $g = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i'}$.

$f \sim_2 (R)\ g$:<=> es gibt $A_i R A_i' \subset \Omega$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ $(i \leq n)$,

so daß $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$

und $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i'}$.

Für $A,B \subset \Omega$ sei $A \sim_j (R)\ B$:<=> $\chi_A \sim_j (R)\ \chi_B$, $(j=1,2)$.

Wie bei $\sim$ schreiben wir abkürzend auch $\sim_1$, $\sim_2$.

Satz (1.4.3):

$A,B \subset \Omega$ und $A \sim_i B \Rightarrow A \sim B$, $(i=1,2)$.

Beweis:

Wegen $\sim_1 \Rightarrow \sim_2$ (nach Def.) genügt es, den Satz für $\sim_2$ zu zeigen.

Sei $\mu: \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^*$ ein R-invariantes Maß.

Definiere $\tilde{\mu}: V \to \mathbb{R}^*$,

$\tilde{\mu}(f) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$, wenn $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $A_i \subset \Omega$.

Zeige: $\tilde{\mu}$ ist wohldefiniert.

1. Jedes $f \in V$ hat eine solche Darstellung.

2. Sei $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot \chi_{B_i}$.

$C_1, \ldots, C_k$ seien alle Atome aus den A_i und B_i .
Zu $i \leq n$, $j \leq m$ gibt es dann N_i, $M_j \subset \{1,\ldots,k\}$ mit

$A_i = \sum_{p \in N_i} C_p$; $B_j = \sum_{p \in M_j} C_p$.

$\alpha_i \cdot \mu(A_i) = \alpha_i \cdot \mu(\sum_{p \in N_i} C_p) = \sum_{p \in N_i} \alpha_i \cdot \mu(C_p)$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p \in N_i} \alpha_i \cdot \mu(C_p) = \sum_{p=1}^{k} \mu(C_p) \cdot \sum_{p \in N_i} \alpha_i$.

Ebenso $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot \mu(B_i) = \sum_{p=1}^{k} \mu(C_p) \cdot \sum_{p \in M_i} \beta_i$.

Da $f|C_p \equiv \sum_{i\leq n, C_p \subset A_i} \alpha_i = \sum_{p\in N_i} \alpha_i = \sum_{p\in M_i} \beta_i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu(B_i) \Rightarrow \tilde{\mu}$ ist wohldefiniert.

Zeige: $\tilde{\mu}(f+g) = \tilde{\mu}(f)+\tilde{\mu}(g)$:

Es gibt $C_1,\ldots,C_k \subset \Omega$, so daß die C_i disjunkt und

$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \chi_{C_i}$ und $g = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cdot \chi_{C_i}$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q})$.

$\tilde{\mu}(f+g) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i+\beta_i)\cdot\mu(C_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\cdot\mu(C_i) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\cdot\mu(C_i) =$

$\tilde{\mu}(f)+\tilde{\mu}(g)$.

Es ist klar, daß $\tilde{\mu}(\chi_A) = \mu(A)$.

Sei $A \sim_2 B \Rightarrow$ (nach Def.)

$\chi_A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$ und $\chi_B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{B_i}$ mit $A_i \; R \; B_i$.

$\Rightarrow \mu(A) = \tilde{\mu}(\chi_A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(B_i) =$

$\tilde{\mu}(\chi_B) = \mu(B)$. ⧖

Wir haben also ohne weitere Bedingung an R:

$\sim_1 \Rightarrow \sim_2 \Rightarrow \sim$.

Um $\sim \Rightarrow \sim_1$ zu erhalten, muß von R noch einiges verlangt werden, wie man leicht daraus sieht, daß $\sim$ Äquivalenzrelation und monoton (d.h. $A \subset B \subset C$ und $A\sim C \Rightarrow A\sim B$) ist.

<u>Definition (1.4.4):</u>

Die Relation R auf $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt schön, wenn gilt:

i) R ist Äquivalenzrelation.

ii) $A \; R \; B \Rightarrow$ es gibt eine Bijektion $\phi: A \leftrightarrow B$, so daß für $D \subset A$: $D \; R \; \{\phi(x) | x \in D\}$.

Die nächsten Sätze werden liefern, daß $\sim(R) \Rightarrow \sim_1(R)$, wenn R schön ist.

Notwendig ist diese Bedingung nicht. Z.B. sei $R := \{(A,A) | A \subset \Omega, A \neq \Omega\}$. Immerhin soll das folgende

Beispiel zeigen, daß man sie nicht wesentlich schwächer nehmen darf.

Beispiel (1.4.5):

$\Omega := \{1,2,3,4,5,6,7\}$, R sei reflexiver und symmetrischer Abschluß der Beziehungen: $\{1,2\}R\{4,5\}$, $\{1,2,3\}R\{4,6,7\}$, $\{2\}R\{7\}$, $\{2,3\}R\{5,6\}$.

=> R ist Äquivalenzrelation und ARB => $|A|=|B|$, aber R ist nicht schön.

Statt $\chi_{\{...\}}$ schreiben wir einfach (...).

Es gilt: $(1) = 1/2\cdot((1,2)+(1,2,3)-(2)-(2,3))$;

$(4) = 1/2\cdot((4,5)+(4,6,7)-(7)-(5,6))$;

also ist $(1)\sim_2(4)$ und mit Satz(1.4.3) auch $(1)\sim(4)$.

Annahme: $(1)\sim_1(4)$.

O.E. gilt dann $(1) = \alpha(1,2)+\beta(1,2,3)+\gamma(2)+\delta(2,3)+\varepsilon(1)+\zeta(2)+\eta(3)+\theta(4)+\iota(5)+\kappa(6)+\lambda(7)+\mu(4,5)+\nu(4,6,7)+\xi(7)+\pi(5,6)$;

und $(4) = \alpha(4,5)+\beta(4,6,7)+\gamma(7)+\delta(5,6)+\varepsilon(1)+ \ldots^{(s.o.)}+\lambda(7)+\mu(1,2)+\nu(1,2,3)+\xi(2)+\pi(2,3)$.

Dabei bedeuten die kleinen griechischen Buchstaben jeweils die Anzahl des positiven Auftretens minus der Anzahl des negativen Auftretens der charakteristischen Funktion in der Darstellung von (1) bzw.(4). Diese Darstellung ist möglich, da man die Mengen A_i, die bei der Überführung $\Sigma\sigma_i\cdot\chi_{A_i} = (1)$, $\Sigma\sigma_i\cdot\chi_{A_i'} = (4)$ nicht umgewandelt werden (d.h. $A_i=A_i'$) o.B.d.A. alle einelementig nehmen kann und ihr Auftreten mit $\varepsilon,..\lambda$ zählt.

Angewandt auf die einzelnen Punkte von Ω ergeben die beiden Funktionalgleichungen folgende Gleichungssysteme I und II.

I: 1: $\alpha+\beta+\varepsilon = 1$; 2: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\zeta = 0$; 3: $\beta+\delta+\eta = 0$;
4: $\theta+\mu+\nu = 0$; 5: $\iota+\mu+\pi = 0$; 6: $\kappa+\nu+\pi = 0$;
7: $\lambda+\nu+\xi = 0$;

II: 1: $\varepsilon+\mu+\nu = 0$; 2: $\zeta+\mu+\nu+\xi+\pi = 0$; 3: $\eta+\nu+\pi = 0$;
4: $\alpha+\beta+\theta = 1$; 5: $\alpha+\delta+\iota = 0$; 6: $\beta+\delta+\kappa = 0$;
7: $\beta+\gamma+\lambda = 0$;

In I nach $\varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda$ aufgelöst und in II eingesetzt ergibt:

i) $\mu+\nu-\alpha-\beta+1 = 0$; ii) $\mu+\nu+\xi+\pi-\alpha-\beta-\gamma-\delta = 0$;
iii) $\nu+\pi-\beta-\delta = 0$; iv) = i); v) $\alpha+\delta-\mu-\pi = 0$;
vi) = iii); vii) $\beta+\gamma-\nu-\xi = 0$;
i) - ii) + iii) + vii): $2\gamma-2\xi+1 = 0$;

Daraus folgt, daß entweder γ oder ξ nicht ganzzahlig sind. Widerspruch! (Denn γ, ξ waren Anzahlen des Auftretens.)

Also: $\{1\} \not\sim_1 \{4\}$. ⧖

Im folgenden sei Ω eine feste Menge und R eine schöne Relation auf $\mathfrak{P}(\Omega)$.

Wir zitieren zwei klassische Ergebnisse, die uns wertvolle Hilfe leisten werden:

Satz (1.4.6):

Ist Q eine schöne Relation auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ und gilt:

$A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$, AQA', BQB' $\Rightarrow (A + B)Q(A' + B')$,

so gilt auch:

a) $A \subset B \subset C$ und $AQC \Rightarrow AQB$.

b) Für $i,j \leqq n$ sei $A_i Q A_j$ und $B_i Q B_j$ und $\sum\limits_{i \leqq n} A_i \; Q \; \sum\limits_{i \leqq n} B_i$.

Dann ist $A_1 Q B_1$.

Zum Beweis für a) vgl. /2/ für b) vgl. /20/ .

Bemerkung: a) stellt eine Verallgemeinerung des Satzes von Cantor/Bernstein ($|A| \leqq |B|, |B| \leqq |A| \Rightarrow |A| = |B|$.) , b) eine Verallgemeinerung des Satzes von Schröder/Bernstein ($2\kappa = 2\kappa' \Rightarrow \kappa = \kappa'$) dar.

Definition (1.4.7):

$\Omega^{(\mathbb{N})} := \{A \subset \Omega \times \mathbb{N} \mid \pi_2(A) \text{ endlich}\}$.

(π_1, π_2 bezeichne die Projektionen.)

Für $A \subset \Omega$ sei $A^i := \{(x,i) \mid x \in A\}$.

$A \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ heißt einfach, wenn $(x,i),(x,j) \in A \Rightarrow i = j$.

Für $A,B \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ sei $AQ'B :\Leftrightarrow A,B$ einfach und $\pi_1(A) \, R \, \pi_1(B)$.

$AQB :\Leftrightarrow$ es gibt $A_1,..,A_n,B_1,..,B_n \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ mit $A= \sum_{i=1}^{n} A_i$, $B= \sum_{i=1}^{n} B_i$ und $A_i Q' B_i$ für $i=1,..,n$.

Die Relation $\sim_1'$ sei definiert als $\sim_1(Q)$ gemäß Definition (1.4.2).

<u>Satz (1.4.8):</u> Q ist schön.

Beweis:

1. Q ist Äquivalenzrelation.

<u>reflexiv</u>: sei $A\in\Omega^{(\mathbb{N})}$ => es gibt n, so daß $A= \sum_{i=0}^{n} (A\cap\Omega^i)$. $\pi_1(A\cap\Omega^i) \, R \, \pi_1(A\cap\Omega^i)$

$A\cap\Omega^i \; Q' \; A\cap\Omega^i \Rightarrow AQA$.

<u>symmetrisch</u>: klar, da Q' symmetrisch.

<u>transitiv</u>: Sei AQB und BQC.

$\Rightarrow \quad A = \sum_{i=1}^{n} A_i \, , \quad B = \sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{i=1}^{m} B_i' \, , \quad C = \sum_{i=1}^{m} C_i \, ,$

wobei $A_i Q' B_i$, $B_j' Q' C_j$ für $i \leq n$, $j \leq m$.

$U_1,...,U_k$ seien die Atome aus den B_i und B_j', daher sind sie einfach.

Nach Def. von Q' und weil R schön, gibt es ϕ_i, ψ_j für $i\leq n, j\leq m$ mit $\phi_i : \pi_1(A_i) \leftrightarrow \pi_1(B_i)$,

$\psi_j : \pi_1(B_j') \leftrightarrow \pi_1(C_j)$.

Sei für $l\leq k$ $U_l \subset B_i \cap B_j'$. => $\phi_i^{-1}(\pi_1(U_l)) \subset \pi_1(A_i)$ und $\psi_j(\pi_1(U_l)) \subset \pi_1(C_j)$. Weil R schön =>:

$\phi_i^{-1}(\pi_1(U_l)) \, R \, \pi_1(U_l)$ und $\psi_j(\pi_1(U_l)) \, R \, \pi_1(U_l)$.

Weil R transitiv: $\phi_i^{-1}(\pi_1(U_l)) \, R \, \psi_j(\pi_1(U_l))$.

$A_{i,l} := \{(x,\iota) \in A_i \mid x \in \phi_i^{-1}(\pi_1(U_l))\}$;

$C_{j,l} := \{(x,\iota) \in C_j \mid x \in \psi_j(\pi_1(U_l))\}$;

$\Rightarrow A_{i,l} Q' C_{j,l}$; die $A_{i,l}$ und die $C_{j,l}$ $(l \leq k, i=i_l, j=j_l)$ bilden jeweils disjunkte Familien.

Es ist $A_i = \sum_{U_l \subset B_i} A_{i,l}$, $C_j = \sum_{U_l \subset B'_j} C_{j,l}$.

$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{U_l \subset B_i} A_{i,l}$, $C = \sum_{j=1}^{m} \sum_{U_l \subset B'_j} C_{j,l}$.

Da es zu jedem $l \leq k$ genau ein $i \leq n$ und $j \leq m$ gibt, so daß $U_l \subset B_i \cap B'_j$ und damit $A_{i,l} Q' C_{j,l}$, folgt durch Umnumerierung die verlangte Zerlegung.

$\Rightarrow$ AQC .

2. Teil ii) der Def. von "schön".

Sei AQB. Zu zeigen: es gibt $\omega: A \leftrightarrow B$ mit $U \; Q \; \{\omega(x) \mid x \in U\}$ für $U \subset A$.

$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$, $A_i \; Q' \; B_i$;

$\Rightarrow$ für $i \leq n$: $\pi_1(A_i) \; R \; \pi_1(B_i)$ und A_i, B_i einfach;

$\Rightarrow$ es gibt Bijektionen $\phi_i: \pi_1(A_i) \leftrightarrow \pi_1(B_i)$.

$\rho_i: \pi_1(B_i) \to B_i \; : \; x \mapsto \iota y(\pi_1(y) = x$ und $y \in B_i)$ ist eine Bijektion; ebenso $\pi_1|A_i$. Also ist auch $\psi_i := \rho_i \circ \phi_i \circ \pi_1|A_i$ eine Bijektion: $A_i \to B_i$.

Sei $S \subset A_i \Rightarrow \pi_1(S) \subset \pi_1(A_i) \Rightarrow$ (weil R schön) $\pi_1(S) \; R \; \phi_i(\pi_1(S))$.

$\pi_1(\rho_i \circ \phi_i \circ \pi_1(S)) = \phi_i \circ \pi_1(S) = \phi_i(\pi_1(S))$.

$\Rightarrow S \; Q' \; \psi_i(S)$.

Def. $\omega: A \leftrightarrow B \; : \; \omega(y) := \psi_i(y)$, wenn $y \in A_i$ (wohldef.!)

$\Rightarrow \omega$ ist die verlangte Bijektion; denn

$A_i \cap U \; Q' \; \psi_i(A_i \cap U)$, $U = \sum_{i=1}^{n} (A_i \cap U)$ und

$\omega(U) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(A_i \cap U) \Rightarrow U \; Q \; \omega(U)$.

⌛

<u>Satz (1.4.9):</u> $\sim_1$, $\sim_1'$, $\sim_2$ sind transitiv.

Beweis:

Sei $f,g,h \in V$ mit $f\sim_1 g\sim_1 h$.

nach Def.: $f = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i}$, $g = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i'}$, wobei

$\sigma_i \in \{1,-1\}$ und $A_i R A_i'$ für $i \leqq n$.

Ebenso $g = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{B_i}$, $h = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{B_i'}$, wobei

$\tau_i \in \{1,-1\}$ und $B_i R B_i'$ für $i \leqq m$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i} + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{B_i} - g \\ h = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i'} + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{B_i'} - g \end{array}\right\} \Rightarrow f\sim_1 h \quad .$$

Für $\sim_1'$ und $\sim_2$ geht der Beweis genauso. ⌛

<u>Satz (1.4.10):</u>

$A \sim_1 B \iff A^i \sim_1' B^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $A,B \subset \Omega$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" ist klar, da die für $A\sim_1 B$ verwendete Zerlegung auch $A^i \sim_1' B^i$ liefert.

"$\Leftarrow$": O.B.d.A. sei $i=0$, also $A^0 \sim_1' B^0$.

Dann gibt es $X_1,\ldots,X_n$, $X_1',\ldots,X_n'$ mit $X_j Q X_j'$ und $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \{1,-1\}$, so daß

$$\chi_{A^0} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \chi_{X_j} \quad \text{und} \quad \chi_{B^0} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \chi_{X_j'} \; .$$

Aus der Def. von Q folgt:

Zu $j \leqq n$ gibt es jeweils paarweise disjunkte Mengen $A_{j,k}$, $B_{j,k}$ $(k \leqq n_j)$, so daß $\pi_1(A_{j,k})\ R\ \pi_1(B_{j,k})$, jedes $A_{j,k}$, $B_{j,k}$ einfach und $X_j = \sum_{k=1}^{n_j} A_{j,k}$,

$X'_j = \sum_{k=1}^{n_j} B_{j,k}$ ist.

$\bar{A}_{j,k} := \pi_1(A_{j,k})$, $\bar{B}_{j,k} := \pi_1(B_{j,k})$ für $k \leqq n_j$.

$$\chi_A(x) = \chi_{A^0}((x,0)) = \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{A^0}((x,i)) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \chi_{X_j}((x,i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \sum_{k=1}^{n_j} \chi_{A_{j,k}}((x,i)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{A_{j,k}}((x,i)) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \sum_{k=1}^{n_j} \chi_{\bar{A}_{j,k}}(x) .$$

In gleicher Weise erhält man $\chi_B = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \sum_{k=1}^{n_j} \chi_{\bar{B}_{j,k}}$.

Weil $\bar{A}_{j,k} \sim_1 \bar{B}_{j,k} \Rightarrow A \sim_1 B$. ⌛

<u>Satz und Definition (1.4.11):</u>

Sei $f \in V$, Bild(f) $\subset \mathbb{N}$.

$\tilde{f} := \{(x,i) \mid x \in \Omega,\ 0 < i \leqq f(x)\} \in \Omega^{(\mathbb{N})}$.

Es gelten:

a) $\tilde{f} \sim_1' \tilde{g} \iff$ es gibt $C, D, C', D' \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ mit $D \subset C$, $D' \subset C'$, CQC', DQD' und $\tilde{f} = C - D$, $\tilde{g} = C' - D'$.

b) $f \sim_1 g \Rightarrow \tilde{f} \sim_1' \tilde{g}$.

c) $\tilde{f} \sim_1' \emptyset \Rightarrow f \sim_1 0$.

Beweis:

a) (nur $\Rightarrow$ ist zu zeigen)

$\tilde{f} \sim_1' \tilde{g} \Rightarrow$ O.E. gibt es $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$, $A_1', \ldots, A_n'$, $B_1', \ldots, B_m' \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ einfach, $A_i Q' A_i'$, $B_j Q' B_j'$

und $\chi_{\tilde{f}} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{m} \chi_{B_i}$.

$\chi_{\tilde{g}} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i'} - \sum_{i=1}^{m} \chi_{B_i'}$.

Wir ordnen jedem A_i, A_i' $(i \leqq n)$ eine Menge $\Xi_i, \Xi_i' \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ zu (induktive Definition):

$\Xi_1 := \{(x,1) \mid x \in \pi_1(A_1)\}$;

$\Xi_{i+1} := \{(x,j) \mid x \in \pi_1(A_{i+1}),\ j = \min(p>0 \mid (x,p) \notin \bigcup_{q=1}^{i} \Xi_q)\}$

Die Ξ_i' seien entsprechend definiert.

Jedem B_i (B_i') ordnen wir zu:

$$\Lambda_i := \{(x,j) \mid x \in \pi_1(B_i),\ j = \max(p \mid (x,p) \in \bigcup_{q=1}^{n} \Xi_i - \bigcup_{q=1}^{i-1} \Lambda_q)\} .$$

(Entsprechend Λ_i')

Weil nach Voraussetzung jedes x in mindestens sovielen der $\pi_1(A_i^{(')})$ $(i \leq n)$ wie der $\pi_1(B_i^{(')})$ $(i \leq m)$ auftritt, gilt diesauch für die $\Xi_i^{(')}$, $\Lambda_i^{(')}$. Daher sind die $\Lambda_i^{(')}$ wohldefiniert (die Maxima existieren).

Es gilt:

1. Die $(\Xi_i^{(')})_{i \leq n}$ und die $(\Lambda_i^{(')})_{i \leq m}$ sind Familien paarweise disjunkter Mengen.
2. $\pi_1(\Xi_i^{(')}) = \pi_1(A_i^{(')})$, $\pi_1(\Lambda_i^{(')}) = \pi_1(B_i^{(')})$.

   => (nach Def. Q) $\Xi_i^{(')}\ Q\ A_i'$, $\Lambda_i^{(')}\ Q\ B_i^{(')}$.

   Weil $A_i Q A_i'$, $B_i Q B_i'$ und Q transitiv (Satz 1.4.8),

   => $\Xi_i\ Q\ \Xi_i'$ und $\Lambda_i\ Q\ \Lambda_i'$.

   Weil Q additiv abgeschlossen, gilt auch:

   $$\sum_{i=1}^{n} \Xi_i\ Q\ \sum_{i=1}^{n} \Xi_i' \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i\ Q\ \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i' .$$

Nach Konstruktion ist $\sum^{n} \Xi_i^{(')} \supset \sum^{m} \Lambda_i^{(')}$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{f} = \sum^{n} \Xi_i - \sum^{m} \Lambda_i$, $\tilde{g} = \sum^{n} \Xi_i' - \sum^{m} \Lambda_i'$.

Für $x \in \Omega$ sei $\Omega_x := \{(x,i) \mid i \in N\}$.

Es gilt für alle $x \in \Omega$:

$f(x)=k$ <=> es gibt l: x tritt in genau l+k vielen der $\pi_1(A_i)$ $(i \leq n)$ und in genau l vielen der $\pi_1(B_i)$ $(i \leq m)$ auf.

$\Longrightarrow$ x tritt in genau l+k vielen der $\pi_1(\Xi_i)$ und in genau l vielen der $\pi_1(\Lambda_i)$ auf. => (nach Konstr. und weil (Ξ_i), (Λ_i) jeweils disjunkt):

$\{(x,1),..,(x,l+k)\} = \sum_{i=1}^{n} \Xi_i \cap \Omega_x$ und

$$\{(x,k+1),\dots,(x,k+1)\} = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i \cap \Omega_x .$$

$$\Rightarrow \tilde{f} \cap \Omega_x = \left(\sum_{i=1}^{n} \Xi_i - \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i\right) \cap \Omega_x \text{ für alle } x \in \Omega .$$

Ebenso hat man $\tilde{g} \cap \Omega_x = \left(\sum^{n} \Xi_i' - \sum^{m} \Lambda_i'\right) \cap \Omega_x$.

Damit folgt die Behauptung a).

⌛

b) Sei $f \sim_1 g \Rightarrow$ es gibt $A_1^{(\prime)},\dots,A_n^{(\prime)}$, $B_1^{(\prime)},\dots,B_m^{(\prime)} \subset \Omega$, so daß $A_i R A_i'$, $B_j R B_j'$ $(i \leq n, j \leq m)$ und

$$f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{m} \chi_{B_i} , \quad g = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i'} - \sum_{i=1}^{m} \chi_{B_i'} .$$

Wir definieren $\Xi_i^{(\prime)}$, $\Lambda_i^{(\prime)}$ wie in a), wobei wir definitionsgemäß (!) $\pi_1(A_i^{(\prime)})$ als $A_i^{(\prime)}$ verstehen.

Mit den gleichen Schlüssen wie in a) erhalten wir:

$$\tilde{f} = \sum^{n} \Xi_i - \sum^{m} \Lambda_i , \quad \tilde{g} = \sum^{n} \Xi_i' - \sum^{m} \Lambda_i', \quad \sum^{n} \Xi_i Q \sum^{n} \Xi_i' , \quad \sum^{m} \Lambda_i Q \sum^{m} \Lambda_i' .$$

Damit folgt die Behauptung b).

⌛

c) Beweis durch Induktion nach $m := \max(f(x) \mid x \in \Omega)$.

Def.: $\mathrm{trg}(f) := \{x \mid f(x) \neq 0\}$.

m=1: $\tilde{f} = (\mathrm{trg}(f))^1 \sim_1' \emptyset \Rightarrow$ (Satz 1.4.10)
$\mathrm{trg}(f) \sim_1 \emptyset \Rightarrow$ (weil $\chi_{\mathrm{trg}(f)} = f$) $f \sim_1 0$.

m=n+1: $\tilde{f} \sim_1' \emptyset \Rightarrow$ (Satz 1.4.12, s.u.) für $g := f - \chi_{\mathrm{trg}(f)}$ ist $\tilde{g} \sim_1' \emptyset$ und $\tilde{\chi}_{\mathrm{trg}(f)} \sim_1' \emptyset \Rightarrow$ (I.V.) $f - \chi_{\mathrm{trg}(f)} \sim_1 0$ und $\chi_{\mathrm{trg}(f)} \sim_1 0$.
Weil $\sim_1$ additiv $\Rightarrow f \sim_1 0$.

⌛

⌛

Satz (1.4.12):

Ist $B, A \in \Omega^{(\mathbb{N})}$, $B \subset A$ und $A \sim_1' \emptyset$, so ist auch $B \sim_1' \emptyset$.

Beweis:

Sei $A \sim_1' \emptyset$ $\Rightarrow$ (Satz 1.4.11,a)): es gibt $C, D, C', D' \in \Omega^{(\mathbb{N})}$, $D \subset C$, $D' \subset C'$, CQC', DQD' mit:

$A = C - D$ und $\emptyset = C' - D'$. Weil $C'=D'$ und Q transitiv, folgt CQD.
Wegen $B \subset A \subset C$ gilt $D \subset C-B \subset C$.
Da Q schön ist (Satz 1.4.8) gilt mit Satz 1.4.6 a):
$DQC-B. \Rightarrow C-BQC \Rightarrow C-(C-B) = B \sim_1' \emptyset = C-C$.

⌛

Satz (1.4.13):

Sind $B,A \subset \Omega$ und $A \sim B$, so ist auch $A \sim_2 B$.

Beweis: Wir nehmen $A \not\sim_2 B$ an und konstruieren ein Maß, das A und B trennt und R-invariant ist.

V sei wieder der von den charakteristischen Funktionen über Ω erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
$U := \{f \in V \mid f \sim_2 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.
Da nach Annahme $\chi_A \not\sim_2 \chi_B$, ist $\overline{\chi_A} \neq \overline{\chi_B}$ in V/U .

Sei $0 \leq f_1, .., f_n \in V$. Wir werden einen Homomorphismus $\phi: V/U \to \mathbb{R}$ angeben, mit $\phi(\overline{f_i}) \geq 0$ und $\phi(\overline{\chi_A}) \neq \phi(\overline{\chi_B})$.

Sei $P := \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{f_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}^+ \}$.

Es gilt: $P \cap -P = \{0\}$; denn sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{f_i} = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \overline{f_i}$

mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}^+$. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \overline{f_i} = 0$ für $\gamma_i := \alpha_i + \beta_i$.

$\Rightarrow 0 \sim_2 h := \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot f_i$ ($\in V$!) $\Rightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{N}$, so

daß $k \cdot h \sim_1 0 \Rightarrow$ (1.4.11,b) $\widetilde{k \cdot h} \sim_1' \emptyset$; weil $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i \leq h$

$\Rightarrow$ (1.4.12) $\widetilde{k \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i} \sim_1' \emptyset \Rightarrow$ (1.4.11c)

$k \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i \sim_1 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_i \sim_2 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{f_i} = 0$.

Es gibt daher eine Hyperebene H in V/U, die P und -P trennt und $\overline{\chi_A} - \overline{\chi_B}$ nicht enthält (lineare Algebra).

$\phi: V/U \to \mathbb{R}$ sei in üblicher Weise als Abstand zu H definiert.

Dann gilt: $\phi|P \geqq 0$; $\phi(\overline{\chi_A}) \neq \phi(\overline{\chi_B})$.

Wendet man den Kompaktheitssatz auf die Formelmenge

$\Gamma := \{$"es gibt Homomorph. $\phi: V/U \to \mathbb{R}$, so daß $\phi(\overline{f}) \geqq 0$ und $\phi(\overline{\chi_A}) \neq \phi(\overline{\chi_B})$ " $|$ $f \in V$, $f \geqq 0$ $\}$ an, so erhält man einen Homomorphismus $\phi^\star: V/U^\star \to \mathbb{R}^\star$ mit:

$\phi^\star(\overline{f}) \geqq 0$ für alle $f \in V$, $f \geqq 0$ und $\phi^\star(\overline{\chi_A}) \neq \phi^\star(\overline{\chi_B})$.

$\mu: \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^\star$, def. durch $\mu(X) := \phi^\star(\overline{\chi_X})$, ist dann ein R-invariantes Maß, das A und B trennt.

$\Rightarrow A \not\sim B \Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung!

Also war die Annahme falsch,und es gilt $A \sim_2 B$.

$\boxtimes$

<u>Satz (1.4.14):</u>

Sind $A,B \subset \Omega$ und $A \sim_2 B$, so ist auch $A \sim_1 B$.

Beweis:

$A \sim_2 B \Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß $n \cdot \chi_A \sim_1 n \cdot \chi_B$.

$\Rightarrow$ (Satz 1.4.11,b) $\widetilde{n \cdot \chi_A} \sim_1' \widetilde{n \cdot \chi_B} \Rightarrow$ (Satz 1.4.11,a)

Es gibt $C,D,C',D' \in \Omega^{(\mathbb{N})}$ mit $D \subset C$, $D' \subset C'$, CQC', DQD' und $\widetilde{n \cdot \chi_A} = C - D$, $\widetilde{n \cdot \chi_B} = C' - D'$.

$\widetilde{n \cdot \chi_A} = \sum_{i=1}^{n} A^i$; $\widetilde{n \cdot \chi_B} = \sum_{i=1}^{n} B^i$ (nach Def. von $\sim$)

Sei $m := \max(i \in \mathbb{N} |$ es gibt $x \in \Omega$: $(x,i) \in C \cup C')$ + 1 .

Für $1 \leqq i \leqq n$ sei $\Delta_i^{(\prime)} := \{(x, m \cdot (i-1)+j) | (x,j) \in D^{(\prime)}\}$.

$\Rightarrow \Delta_1^{(\prime)} = D^{(\prime)}$ und $\Delta_i^{(\prime)} Q \Delta_j^{(\prime)}$ für $i,j \leqq n$.

Für $j \neq i \leqq n$: $\emptyset = \Delta_i^{(\prime)} \cap \Delta_j^{(\prime)} = A^i \cap \Delta_j = B^i \cap \Delta_j'$.

Weil Q transitiv und additiv ist, folgt:

$\Delta_i Q \Delta_i'$ $(i \leqq n)$ und $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \; Q \; \sum_{i=1}^{n} \Delta_i'$.

$X_i := A^i + \Delta_i$; $Y_i := B^i + \Delta'_i$.

$\Rightarrow$ die X_i und die Y_i sind jeweils paarweise disjunkt.

Wegen $A^i Q A^j$, $\Delta_i Q \Delta_j \Rightarrow X_i Q X_j$ und ebenso $Y_i Q Y_j$ für $i,j \leq n$.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} A^i + \Delta_1 + \sum_{i=2}^{n} \Delta_i = C + \sum_{i=2}^{n} \Delta_i .$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} B^i + \Delta'_1 + \sum_{i=2}^{n} \Delta'_i = C' + \sum_{i=2}^{n} \Delta'_i .$$

Weil CQC' und $\sum_{i=2}^{n} \Delta_i \; Q \; \sum_{i=2}^{n} \Delta'_i$, folgt

$\sum_{i=1}^{n} X_i \; Q \; \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Satz (1.4.6,b) liefert damit:

$X_1 Q Y_1$. Da $A^1 = X_1 - \Delta_1$ und $B^1 = Y_1 - \Delta'_1$, ist $A^1 \sim'_1 B^1$.

$\Rightarrow$ (Satz 1.4.10) $A \sim_1 B$.

$\boxtimes$

Mit den letzten Sätzen haben wir also gezeigt, daß für <u>schöne</u> Relationen R auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:

$$\sim(R) = \sim_1(R) = \sim_2(R) \quad .$$

Die Klasse der schönen Relationen umfaßt viele der in der Mathematik auftretenden Äquivalenzrelationen, wie etwa Gleichmächtigkeit, Isomorphie, Homöomorphie, Kongruenz u.s.w. .

1.5 Translationsinvariante Maße auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$

Wir kommen zu ersten Anwendungen der im letzten Abschnitt erzielten Ergebnisse.
Als Ω nehmen wir die reellen Zahlen und als R die (stückweise) Kongruenz von Mengen, gegeben durch Translationen. Wie wir gleich sehen werden, kollabiert jedes R-invariante Maß auf allen beschränkten Mengen, wenn wir R ohne weitere Einschränkung nehmen. Verlangen wir jedoch die Maßgleichheit nur für beschränkte kongruente Mengen, so erhalten wir ein feinstes Maß, das echt feiner ist als z.B. das Lebesgue-Maß. Dieses Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als wir später zeigen werden, daß ein feinstes translationsinvariantes Maß o.E. so angegeben werden kann, daß es mit einem beliebigen, das Längenmaß auf den Intervallen fortsetzenden, Inhalt fast übereinstimmt (d.h. bis auf infinitesimale Differenz). Das Lebesgue-Maß kann also echt "verbessert" werden.

Zunächst sei verdeutlicht, daß man Translationsinvarianz nicht auf allen Mengen verlangen darf:

Bemerkung (1.5.1):

Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, so daß $\mu(A) = \mu(A+t)$ für alle $A \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, so ist $\mu(B) = 0$ für alle beschränkten $B \subset \mathbb{R}$.

Beweis:

Sei B beschränkt durch $(-n, n)$.

Def.: $C := \sum_{i \in \mathbb{N}} B+2ni$.

$\Rightarrow \mu(B) = \mu(C - C+2n) = \mu(C)-\mu(C+2n) = 0$.

Definition (1.5.2):

$T := \{(A,A+t) \mid A \subset \mathbb{R},\ A \text{ beschränkt},\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{(X,X) \mid X \subset \mathbb{R}\}$.

<u>Folgerung:</u> T ist eine schöne Relation auf $\mathfrak{P}(\Omega)$; denn T ist Äquivalenzrelation und $x \mapsto x+t$ stellt die gem. (1.4.4,b) verlangte Bijektion dar.

Mit $\sim$, $\sim_1$, $\sim_2$ bezeichnen wir jetzt dieselben Relationen wie in 1.4, jedoch mit $\mathbb{R}$ und T definiert.

<u>Satz (1.5.3):</u>

Es gibt eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $|A| \geq \aleph_1$ und $A \sim \emptyset$.

Beweis:

Sei B eine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum, und o.E. $B \subset (0,1]$, $1 \in B$. Dann ist $|B| = |\mathbb{R}|$.

Sei $1 \neq a \in B$, $A := B - \{1,a\}$.

Def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) := \begin{cases} x+a & \text{,falls } x<1 \\ x-1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Beh.: für alle $i \neq j \in \mathbb{N}$: $f^i(A) \cap f^j(A) = \emptyset$.

Denn sei $f^i(x) = f^j(y)$ für $x,y \in A$.

$\Rightarrow x+k_1a - l_1 = y+k_2a - l_2$ für $k_{1,2}$, $l_{1,2}$ geeignet,

$\Rightarrow x-y + a\cdot(k_1-k_2) + l_2 - l_1 = 0$;

$\Rightarrow$ (lin.Unabh.) $x=y$ und $k_1-k_2 = l_2-l_1 = 0$.

Also $k_1=k_2$, $l_1=l_2 \Rightarrow i=j$.

$C := \sum_{i \in \mathbb{N}} f^i(A)$; $C_1 := C \cap [0,1]$; $C_2 := C - C_1$.

Es ist $A = C - \sum_{i=1}^{\infty} f^i(A) = C - f(C) = C - (C_1+a + C_2-1)$.

Da $C_1+a \; T \; C_1$ und $C_2-1 \; T \; C_2 \Rightarrow (C_1+a \dot{+} C_2-1) \sim_1 C$

$\Rightarrow A \sim_1 \emptyset \Rightarrow$ (Satz 1.4.3) $A \sim \emptyset$.

⌛

Satz (1.5.3) zeigt, daß selbst ziemlich "große" Mengen durch T-invariante Maße nicht mehr getrennt werden können. Welche Mengen getrennt werden können - und zwar durch dasselbe Maß -, soll der folgende Satz zeigen.

Satz (1.5.4):

Sei m ein T-invarianter Inhalt auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, der auf beschränkten Mengen endlich ist. Dann gibt es ein Maß $\mu: \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, das alle Mengen trennt, die m trennt; d.h. $\mu(A) \neq \mu(B)$, falls $m(A) \neq m(B)$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, daß aus $A \sim B$ $m(A)=m(B)$ folgt.

Sei $M := \{ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{X_i} \mid n<\infty, \sigma_i \in \{1,-1\}, X_i \subset \mathbb{R}, m(X_i)<\infty \}$.

Wie im Beweis von (1.4.3) ist

$\tilde{m}: M \to \mathbb{R} : \tilde{m}(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{X_i}) := \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot m(X_i)$ wohldefiniert

auf M und es gilt $\tilde{m}(\chi_X) = m(X)$.

$A \sim B$ => (Satz 1.4.13, 1.4.14) $A \sim_1 B$ => (Def. von T)

$$\chi_A = \chi_X + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i} \quad \text{und} \quad \chi_B = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{A_i+t_i} + \chi_X \,.$$

wobei $X, A_i \subset \mathbb{R}$, A_i beschränkt, $\sigma_i \in \{1,-1\}$, $t_i \in \mathbb{R}$ $(i \leq n)$.

<u>Annahme:</u> $m(A) \neq m(B)$ => o.E. $m(A)<\infty$ => $\chi_A \in M$.

Weil $\Sigma\sigma_i \cdot \chi_{A_i} \in M$, ist auch $\chi_X = \chi_A - \Sigma\sigma_i \cdot \chi_{A_i} \in M$,

=> $\chi_B \in M$.

Wegen $m(A_i) = m(A_i+t_i)$ ist $\tilde{m}(\chi_A) = \tilde{m}(\chi_B)$ =>
$m(A) = m(B)$. Widerspruch!

Wenn nun $m(X) \neq m(Y)$, kann nicht $X \sim Y$ sein. Nach Def. von $\sim$ gibt es also ein Maß $\mu_{X,Y}$, das X und Y trennt und T-invariant ist. Das nach Satz 1.3.3 existierende stark feinste T-invariante Maß ist feiner als jedes $\mu_{X,Y}$ und trennt damit alle Mengen, die m trennt.

⌛

Bemerkung:

a) Es gibt sogar ein Maß, das alle Mengen, die durch irgendeinen T-invarianten Inhalt, der auf beschränkten Mengen endlich ist, getrennt werden, trennt. (das feinste Maß ist feiner als alle Maße gem. 1.5.4)

b) Die Bedingung in Satz 1.5.4, daß m auf beschränkten Mengen endlich sein muß, ist nötig. Denn sei z.B. $m(A) := |A|$, falls A endlich und $m(A) := \infty$ sonst. Dann ist $m(\{0\})>0$, obwohl $\{0\}\sim\emptyset$ (vgl. 1.5.3).

Mit T-invarianten Maßen lassen sich aber noch mehr Mengen trennen als mit klassischen Maßen oder Inhalten. Die Ausfaktorisierung nach T ist nicht so stark, daß die feineren Differenzierungsmöglichkeiten eines Nonstandard-Zahlenbereichs nicht ausgenützt werden könnten.

Satz (1.5.5):

Es gibt eine beschränkte Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$, deren Lebesguemaß 0 ist und für die nicht $A\sim\emptyset$ gilt.

Zum Beweis brauchen wir erst noch den

Satz (1.5.6):

Es gibt eine Borelmenge $C \subset \mathbb{R}$, so daß

1. $C + q = C$ für alle $q \in \mathbb{Q}$;
2. $\lambda(C) = 0$;
3. für alle $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in C$, so daß $x+a_i \in C$ für $i\leq n$.

Beweis:

Wir sagen, $(x_1,x_2,\ldots)$ ist eine n-adische Darstellung von $x \in [0,1)$, wenn $0\leq x_i<n$ und $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot n^{-i}$.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$C_i := \{x \in [0,1) \mid x$ läßt sich in der i-adischen Darstellung ohne die Ziffer 1 schreiben.$\}$.

Folgerung: C_i ist Borelmenge vom Lebesguemaß 0.
Dies sieht man ähnlich wie beim Cantorschen Diskontinuum $= C_3$.

$$C := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \right) + q \right) ;$$

Damit ist C eine Borelmenge, die die Bedingungen 1. und 2. erfüllt.

Zu zeigen: C erfüllt 3.
Seien $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Wegen 1. genügt es, die Bedingung für $a_i \bmod \mathbb{Q}$ nachzuweisen. O.E. sei also $0\leqq a_1,a_2,\dots,a_n<1/k$, wobei $k:=4n+1$.

Sei $(Z,\&)$ die Gruppe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ mit der Addition mod k.
Es gilt: Zu $c_1,\dots,c_n \in Z$ gibt es $b\in Z$, so daß $b\neq 1$ und für alle $i\leqq n$: $b\&c_i \notin \{-1,0,1\} \subset Z$.
Denn zu jedem c_i $(i\leqq n)$ sei $A_i := \{x\in Z \mid x\neq 1$ und $c_i\&x \notin \{-1,0,1\}\}$. $\Rightarrow |A_i|\geqq k-4$. Weil $|Z| = k \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\bigcap_{i\leqq n} A_i\right| \geqq k-4n = 1$.

Also gibt es ein b, das in jedem A_i liegt.

Zu jedem a_i sei $(a_{i1},a_{i2},\dots\dots)$ eine k-adische Darstellung.
Wir definieren die Zahl x in k-adischer Darstellung $(x_1,x_2,\dots\dots)$, so daß für alle $j\in\mathbb{N}$:
für alle $i\leqq n$: $x_j\&a_{ij} \notin \{-1,0,1\}$ und $x_j\neq 1$.
Diese Definition ist nach dem oben Gezeigten möglich.

Für alle $i\leqq n$ ist $x+a_i = (x_1\&a_{i1},x_2\&a_{i2},\dots\dots) + (c_1,c_2,\dots\dots)$, wobei

$$c_j := \begin{cases} 1 \text{ , falls } x_{j+1} + a_{ij+1} \geqq k & (\text{"Übertrag"}) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dies ist möglich, weil wegen $0\leqq a_i<1/k$ a_{i1} stets 0 und damit $x_1\&a_{i1} < k$ ist.

Da $x_j\&a_{ij} \notin \{-1,0,1\}$ nach Wahl von x
$\Rightarrow (x_j\&a_{ij}) \,\&\, c_j \notin \{0,1\}$, d.h. kein Übertrag tritt auf. Also darf komponentenweise addiert werden:

$x + a_i = ((x_1 \& a_{i1}) \& c_1, (x_2 \& a_{i2}) \& c_2, \ldots\ldots)$ für alle $i \leq n$. In dieser Darstellung tritt keine 1 auf. Somit $x + a_i \in C_k \subset C$ $(i \leq n)$.
Weil auch unter den x_j $(j \in \mathbb{N})$ keine 1 auftritt, ist $x \in C_k \subset C$. Damit erfüllt C 3. .

⌛

Beweis von Satz (1.5.5):

Sei C definiert wie in Satz (1.5.6).
$C_n := [0,n) \cap C$.

Def.: Eine Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stückweise, beschränkte Translation, wenn es $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}$ und $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

i) die A_i $(i \leq m)$ sind beschränkt und paarweise disjunkt;

ii)
$$g(x) = \begin{cases} x + t_i, \text{ falls } x \in A_i \ (i \leq m); \\ x \text{ sonst.} \end{cases}$$

F sei die Menge aller stückweisen, beschränkten Translationen.

Behauptung (§): Es gibt kein $f \in F$, so daß $f(C_n) \subset [0,n)$ und $f(C_n) \cap C_n = \emptyset$.

Beweis: Annahme, es gäbe so ein $f \in F$; nach Def. gibt es $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, über die f gem. i) und ii) festgelegt ist.
$\Rightarrow t_i \in (-n,n)$ für alle $i \leq m$.

Nach Satz(1.5.6) existiert $x \in C$ mit $x + |t_i| \in C$ für $i \leq m$.
Wegen 1. von Satz(1.5.6) ist o.E. $x \in C_n$ und $x < \min(\min(n - |t_i|, |t_i|) \mid i \leq m) \Rightarrow x + |t_i| \in C_n$.

Weil $C_n \cap f(C_n) = \emptyset$, muß f jeden Punkt von C_n verändern, d.h.
$C_n = C_n \cap A_1 + C_n \cap A_2 + \ldots + C_n \cap A_m$ und
$f(C_n) = \bigcup_{i \leq m} C_n \cap A_i + t_i$.

$\Rightarrow$ es gibt ein $k \leq m$ mit $x \in C_n \cap A_k$. Nach Wahl von x

und weil $C_n \cap A_k + t_k \subset [0,n)$, ist $t_k > 0$.
Also $x+t_k \in C_n$.
$\Rightarrow \emptyset \neq (C_n \cap A_k)+t_k \cap C_n \subset f(C_n) \cap C_n$.

Widerspruch zur Annahme!

Jetzt wollen wir zeigen, daß $A := C_1$ die in Satz (1.5.5) verlangte Menge ist.
Daß A beschränkte Borelmenge mit Lebesguemaß 0 ist, ist nach Definition und Satz (1.5.6) klar.
Es bleibt zu zeigen: $A \not\sim \emptyset$.

Annahme: $C_1 \sim \emptyset \Rightarrow$(Satz 1.4.13/14) $C_1 \sim_1 \emptyset$.
Für $C_1 \sim_1 \emptyset$ brauchen wir T nur auf endlich vielen beschränkten Mengen verwenden. Es bleibt also genügend Platz, um den in (1.4.7) eingeführten Raum $\Omega^{(\mathbb{N})}$ und die zugehörigen Relationen Q und $\sim_1'$ (bzgl. T) ganz in $\mathbb{R}$ zu simulieren. (Man setze einfach Ω gleich dem beschränkten Intervall I, in dem sich alles für $C_1 \sim_1 \emptyset$ Relevante abspielt, und Ω^i gleich dem Intervall $I+i\cdot l$, wobei l die Länge von I sei.)
Wie man leicht sieht, entspricht Q dann der additive Abschluß von T und die Bijektionen, die es nach (1.4.4,ii) geben muß, sind gerade die Einschränkungen von Funktionen aus F.
Satz(1.4.11a) liefert bei entsprechender Interpretation: $C_1 \sim_1 \emptyset \Rightarrow$ es gibt $X,Y,X',Y' \subset \mathbb{R}$ mit:
XQX', YQY', $Y \subset X$, $Y' \subset X'$, $C_1 = X-Y$, $\emptyset = X'-Y'$.
$\Rightarrow X'=Y' \Rightarrow XQY$, d.h. es gibt ein $f \in F$ mit $f(X)=Y$.
Dieses f eingeschränkt auf X ist eine Bijektion.
Weil $Y=X-C_1 \Rightarrow$ die $f^i(C_1)$ $(i \in \mathbb{N})$ sind paarweise disjunkt.
Es gibt $m \in \mathbb{N}$, so daß $f^i(C_1) \subset [-m,m)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$\text{Sei}\quad g_1(x) := \begin{cases} f^i(x-i)+m\ , & \text{falls } x \in [i,i+1) \cap C \ (i \leqq 2m) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_2(x) := \begin{cases} f^{2m+i}(x-i)+m, & \text{falls } x \in [i,i+1) \cap C \ (i \leqq 2m) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$g_1, g_2 \in F$ und $g_1(C_{2m}), g_2(C_{2m}) \subset [0,2m)$

$$g_1(C_{2m}) \cap g_2(C_{2m}) = \sum_{i=0}^{2m-1} f^i(C_1) \cap \sum_{i=2m}^{4m-1} f^i(C_1) = \emptyset .$$

Weil $g_1 \in F$, gibt es nach Definition $B_1,\dots,B_l \subset [0,2m)$ und $t_1,\dots,t_l \in \mathbb{R}$, so daß:

$$g_1(x) = \begin{cases} x+t_i & \text{, falls } x \in B_i \quad (i \leqq l) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $f|C_1$ bijektiv ist, können nach Def. von g_1 die B_i $(i \leqq l)$ so gewählt werden, daß die B_i+t_i $(i \leqq l)$ paarweise disjunkt sind.

Daher ist $g_1^-(x) := \begin{cases} x-t_i & \text{, falls } x \in B_i+t_i \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

wohldefiniert und aus F.

$\Rightarrow g_1^- \circ g_2 \in F.$

$$C_{2m} \cap g_1^- \circ g_2(C_{2m}) \subset g_1^{-1}(g_1(C_{2m}) \cap g_1^{-1} \circ g_2(C_{2m}) =$$

$$= g_1^{-1}(g_1(C_{2m}) \cap g_2(C_{2m})) = \emptyset.$$

Da andererseits $g_1^-([0,2m)) \subset [0,2m)$, folgt $g_1^- \circ g_2(C_{2m}) \subset [0,2m)$. $\Rightarrow$ Widerspruch zur Behauptung(§)!

$\boxtimes$

1.6 Nonstandard Erweiterungen von Maßen

Die bisherigen Ergebnisse sollten deutlich machen, daß der klassische Maß- oder Inhaltsbegriff insofern unzureichend ist, als - selbst unter R-Invarianz - eine maximale Feinheit mit ihm nicht erreichbar ist. Dies liegt einerseits an der Archimedität, andererseits an der zu kleinen Kardinalität von $\mathbb{R}$. Zudem besteht bei unendlichen Inhalten die unschöne Notwendigkeit, allen "zu großen" Mengen pauschal den Wert ∞ zu geben, was beim Rechnen oft hinderlich ist.

Hier sollen nun feinste Maße konstruiert werden, die ihre Werte in Nonstandard-Erweiterungen von $\mathbb{R}$ annehmen, gleichzeitig aber ein gegebenes $\mathbb{R}$-wertiges (klassisches) Maß "fortsetzen".

Definition (1.6.1):

$\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$ seien Modelle der Theorie der reellen Zahlen und es sei $\mathbb{R}_1 \prec \mathbb{R}_2$, $\mathbb{R}_1 \subset \mathbb{R}_2$.

a) Zu $a \in \mathbb{R}_2$ werde $\tilde{\tilde{a}}$ definiert als $\bigcup_{\iota < \mathbb{R}_1^+} (a-\iota, a+\iota)$.

b) $\mathcal{F} := \bigcup_{a \in \mathbb{R}_1} \tilde{\tilde{a}}$ ("Ring der finiten Zahlen")

c) Für $a,b \in \mathbb{R}_2$ sei $a \simeq b :\Longleftrightarrow a-b \in \tilde{\tilde{0}}$.

d) Für $a \in \mathbb{R}_2$ sei $a \simeq \infty :\Longleftrightarrow 0 < a \notin \mathcal{F}$.

Bemerkung: Die Begriffe $\tilde{\tilde{a}}, \mathcal{F}, \simeq$ hängen natürlich von der Erweiterung $\mathbb{R}_1 \prec \mathbb{R}_2$ ab. Da diese jedoch immer aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, verzichten wir auf eine Indizierung.

Folgerung: $x \in \mathbb{R}_2$, $a,b \in \mathbb{R}_1$ und $a \leqq x \leqq b$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ es gibt genau ein $c \in \mathbb{R}_1$ mit $x \in \tilde{\tilde{c}}$.
$\Rightarrow \varphi$ ist konvex.

Definition (1.6.2):

Seien $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ Modelle der Theorie der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_1 \prec \mathbb{R}_2$, $\mathbb{R}_1 \subset \mathbb{R}_2$.
$\mu : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_2$ sei ein Maß, $\mathfrak{A} \subset \tilde{\mathcal{R}}$ und $m : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_1$ eine Funktion.
μ heißt $\mathbb{R}_1$-$\mathbb{R}_2$-Erweiterung von m, wenn für alle $A \in \mathfrak{A}$: $\mu(A) \simeq m(A)$.

Ist $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}$, so nennen wir μ auch Nonstandarderweiterung von m.

Satz (1.6.3):

R sei Relation auf $\tilde{\mathcal{R}}$, $\mathbb{R}_1 \succ \mathbb{R}$ und $m : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_1$ ein R-invariantes Maß.
Dann gibt es $\mathbb{R}_2 \succ \mathbb{R}_1$ und $\mu : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_2$, das $\mathbb{R}_1$-$\mathbb{R}_2$-Erweiterung von m und feinstes R-invariantes Maß ist.

Beweis:
Nach Satz(1.3.3) gibt es ein feinstes R-invariantes Maß $\nu : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}^*$.
Sei $\mathbb{R}_2$ so gewählt, daß $\mathbb{R}_2 \succ \mathbb{R}^*$ und $\mathbb{R}_2 \underset{\neq}{\succ} \mathbb{R}_1$.
Dann gibt es $0 < \varepsilon \in \tilde{\tilde{0}}$, also $\varepsilon < \mathbb{R}_1^+$;
$\Rightarrow$ für alle $x \in \mathbb{R}_1$ ist $\varepsilon \cdot x < \mathbb{R}_1^+$.

$\nu_1 : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_2$: $A \mapsto \varepsilon \cdot \nu(A)$ ist feinstes R-invariantes Maß.
$\mu : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_2$: $\mu(A) := m(A) + \nu_1(A)$ ist dann ebenfalls R-invariantes Maß und eine $\mathbb{R}_1$-$\mathbb{R}_2$-Erweiterung von m.

Wenn $A \subset B$ und $\nu_1(A) < \nu_1(B) \Rightarrow \nu_1(A) + m(A) < \nu_1(B) + m(B) = \mu(B)$.
Also ist μ feiner als ν_1, somit ebenfalls feinstes Maß. ⌛

Bemerkung: In gleicher Weise kann man ein stark feinstes R-invariantes Maß bekommen, das Erweiterung von m ist.

Der letzte Satz liefert Erweiterungen für Maße nach unserer Definition.
Um auch Erweiterungen für Maße und Inhalte im Sinne der klassischen Maßtheorie, die den Wert ∞ annehmen können, zu erhalten, brauchen wir folgendes Ergebnis.

Satz (1.6.4):

Sei R eine schöne Relation auf $\mathfrak{K}$,
$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}$ und
$m: \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein R-invarianter Inhalt.
Gilt für $A, B \in \mathfrak{A}$ und $A \sim B$, daß $m(A) = m(B)$, so gibt es ein R-invariantes Maß $\mu: \mathfrak{K} \to \mathbb{R}^{\star}$ $(\mathbb{R}^{\star} \succ \mathbb{R})$ mit $\mu|\mathfrak{A} \simeq m$.
Zusätzlich gilt noch: $\mu(A) = m(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $m(A) < \infty$.

Beweis:
Sei V wieder der $\mathbb{Q}$-Vektorraum, der von den charakteristischen Funktionen χ_A $(A \in \mathfrak{K})$ erzeugt wird.
Weil R schön ist, ist nach den Ergebnissen von (1.4) $\sim\, = \,\sim_2$, also $W := V/\sim_2$ ein Unter-VR von V.
Die $\overline{\chi_A}$ bezeichnen wir auch mit $\overline{A}$.

Sei $\Gamma(\phi)$ die Formelmenge mit der einzigen freien Variablen ϕ, die zu jedem $A \in \mathfrak{K}$ und $N \in \mathbb{N}$ die folgende Formel enthält:

$$\left\{\begin{array}{l} \phi \subset W \times \mathbb{R} \text{ ist Funktion und} \\ \overline{A} \in Def(\phi) \text{ und} \\ \phi(\overline{A}) \geqq 0 \text{ und} \\ \text{für alle } a,b \in Def(\phi): \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \text{ und} \\ \text{aus } A \in \mathfrak{A} \text{ und } m(A) < \infty \text{ folgt: } \phi(\overline{A}) = m(A) \text{ und} \\ \text{aus } A \in \mathfrak{A} \text{ und } m(A) = \infty \text{ folgt: } \phi(\overline{A}) > N . \end{array}\right.$$

Wir werden zeigen, daß $\Gamma(\phi)$ endlich erfüllbar ist. Mit dem Kompaktheitssatz erhalten wir ein ϕ^*, das auf allen $\overline{A}^*$ $(A \in \mathfrak{K})$ definiert ist und Werte in $\mathbb{R}^* \succ \mathbb{R}$ annimmt.

Setzt man $\mu(A) := \phi^*(\overline{A}^*)$ für $A \in \mathfrak{K}$, so ist μ das verlangte Maß.

Sei also $A_1,\dots,A_n,\ B_1,\dots,B_m \in \mathfrak{A}$ mit $m(A_i)<\infty$ $(i \leqq n)$; $m(B_i) = \infty$ $(i \leqq m)$;

sei ferner $C_1,\dots,C_k \in \mathfrak{K} - \mathfrak{A}$ und $N \in \mathbb{N}$.

O.E. sei $\{\overline{A}_1,\dots,\overline{A}_{n'}\}$ Basis von $T := \langle \overline{A}_1,\dots,\overline{A}_n \rangle$ mit $n' \leqq n$ und $\{\overline{A}_1,\dots,\overline{A}_{n'},\overline{B}_1,\dots,\overline{B}_{m'}\}$ Basis von $S := \langle \overline{A}_1,\dots,\overline{A}_n,\overline{B}_1,\dots,\overline{B}_m \rangle$ mit $m' \leqq m$ und $\{\overline{A}_1,\dots,\overline{A}_{n'},\overline{B}_1,\dots,\overline{B}_{m'},\overline{C}_1,\dots,\overline{C}_{k'}\}$ Basis von $U := \langle A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m,C_1,\dots C_k \rangle$ mit $k' \leqq k$.(Immer $\mathbb{Q}$-VR!)

Ist $\overline{X} \in S$, so bezeichnen wir die Restklasse in S/T mit $/X/$.

$Q := \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot /B_i/ \mid \alpha_i \geqq 0\}$ ist konvexer Konus in S/T.

m werde kanonisch erweitert auf $V' := \langle \chi_X \mid X \in \mathfrak{A}, m(X)<\infty \rangle$.
Ist $f \in V'$ und $0 \leqq g \leqq f$ mit $g \in V$, so ist $g \in V'$; denn f ist einfache Treppenfunktion und $\mathfrak{A}$ enthält endliche Durchschnitte.

Behauptung: $Q \cap -Q = \{/\{0\}/\}$.

Bew.: Sei $\sum_{i \leqq m} \alpha_i \cdot /B_i/ = - \sum_{i \leqq m} \beta_i \cdot /B_i/$ mit $\alpha_i,\beta_i \geqq 0$.

$\Rightarrow$ Es gibt $\overline{t} \in T$: $\overline{t} = \sum_{i \leqq m} (\alpha_i+\beta_i)\cdot \overline{B}_i$.

$\Rightarrow$ Es gibt Repräsentanten t von $\overline{t}$ in V:

$t = \sum_{i \leqq m} (\alpha_i+\beta_i)\cdot \chi_{B_i}$.

Falls eines der α_i (oder β_i) $> 0 \Rightarrow 0 < \chi_{B_i} \leqq t/\alpha_i$,

$\Rightarrow$ (s.o.) $m(B_i)<\infty$. Widerspruch!

Also sind alle $\alpha_i,\beta_i = 0$. $\Rightarrow$ Behauptung.

Q und -Q lassen sich also durch eine Hyperebene in S/T trennen.(vgl.Hilfsatz im Anschluß an diesen Beweis)

D.h., es gibt einen Homomorphismus $\psi: S/T \to \mathbb{R}$ mit $\psi|_{Q-\{\overline{\emptyset}\}} > 0$.

Für $m'<j\leq m$ ist $\overline{B}_j$ eindeutig dargestellt als $t_j + b_j$, wobei $t_j \in T$, $b_j \in \langle \overline{B}_1,..,\overline{B}_{m'} \rangle$.

Sei $M := \max\ (|m(t_j)|\ :\ m'<j\leq m\ )$ und

$\varepsilon := \min\ (\ \psi(/B_i/)\ :\ i\leq m\ )$.

$L \in \mathbb{N}$ sei so groß gewählt, daß $L\cdot\varepsilon > N+M$.

Definiere $\phi|_S$ durch $\phi(\overline{A}_i) := m(A_i)$ $(i\leq n')$

und $\phi(\overline{B}_i) := L\cdot\psi(/B_i/)$ $(i\leq m')$.

für $i\leq n$: $\phi(\overline{A}_i) = m(A_i)$

und für $i\leq m$: $\phi(\overline{B}_i) > N$.

ϕ muß jetzt noch auf ganz U fortgesetzt werden. Dazu genügt es, eine Hyperebene H<U zu finden, die Kern(ϕ) umfaßt und

$$P := \{ \sum_{i\in E} \alpha_i\cdot\overline{A}_i + \sum_{i\leq m} \beta_i\cdot\overline{B}_i + \sum_{i\leq k} \gamma_i\cdot\overline{C}_i \ |\alpha_i,\beta_i,\gamma_i \geq 0 \}$$

von -P trennt. $(\ E := \{j\leq n | m(A_j) > 0\}\ )$

1. $\mathrm{Kern}(\phi) \cap P = \{0\}$;

denn sei $\phi(\sum_{i\in E} \alpha_i\cdot\overline{A}_i + \sum_{i\leq m} \beta_i\cdot\overline{B}_i) = 0$ $(\alpha_i,\beta_i\geq 0)$

$\Rightarrow \sum_{i\in E} \alpha_i\cdot m(A_i) = 0 \Rightarrow$ alle $\alpha_i=0$, da $m(A_i)>0$.

und $\phi(\sum_{i\leq m} \beta_i\cdot\overline{B}_i) = 0 \geq N\cdot \sum_{i\leq m} \beta_i \Rightarrow$ alle $\beta_i=0$.

2. $P \cap -P = \{0\}$;

denn sei $\sum_{i\in E}(\alpha_i+\alpha_i')\cdot\overline{A}_i + \sum_{i\leq m} (\beta_i+\beta_i')\cdot\overline{B}_i + \sum_{i\leq k} (\gamma_i+\gamma_i')\cdot\overline{C}_i$

$= 0$ mit $\alpha_i,\alpha_i',\beta_i,\beta_i',\gamma_i,\gamma_i' \geq 0$.

Analog zum Beweis von Satz(1.4.13) schließt man:

$$0 \sim_2 h := \sum_{i\in E} (\alpha_i+\alpha_i')\cdot\chi_{A_i} + \sum_{i\leq m} (\beta_i+\beta_i')\cdot\chi_{B_i} + \sum_{i\leq k} (\gamma_i+\gamma_i')\cdot\chi_{C_i}.$$

$\Rightarrow$ es gibt $k \in N$: $\widetilde{k\cdot h} \sim_1' \emptyset$.

Weil $\sum_{i\in E} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} < h \Rightarrow$ (1.4.12) u.(1.4.11,c)

$k \cdot \sum_{i\in E} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \sim_1 0 \Rightarrow \sum_{i\in E} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \sim_2 0 \Rightarrow$

$\sum_{i\in E} \alpha_i \cdot \overline{A}_i = 0.$

In gleicher Weise erhält man, daß die Summenterme für die α_i', β_i, β_i', γ_i, γ_i' O werden.

Der Hilfssatz (s.u.) liefert die gewünschte Hyperebene H.

⌛

Hilfssatz:

Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension n, P ein endlich erzeugter Konus in V mit $P \cap -P = \{0\}$ und U ein Untervektorraum von V mit $U \cap P = \{0\}$. Dann gibt es eine Hyperebene H, die U umfaßt und P und -P trennt.

Beweis: elementare lineare Algebra.

Die Sätze (1.6.3.) und (1.6.4.) liefern als Folgerung:

Satz (1.6.5):

R sei eine schöne Relation auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}$ und $m: \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ R-invarianter Inhalt. Gilt für A, B $\in \mathfrak{A}$ und $A \sim B$, daß $m(A) = m(B)$, so gibt es ein feinstes R-invariantes Maß $\mu: \mathfrak{K} \to \mathbb{R}^\star$ mit $\mu|_{\mathfrak{A}} \approx m$.

Folgerungen (1.6.6):

a) Es gibt eine Nonstandard-Erweiterung $\lambda^\star: \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\star$ des Lebesgue-Maßes λ, die feinstes translationsinvariantes Maß ist. (Translationsinvarianz nur auf beschränkten Mengen.)

Beweis:

Wir wollen Satz (1.6.5) mit der schönen Relation T (vgl.Def.(1.5.2)) anwenden. Dazu muß die Bedingung $A \sim B \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$ sichergestellt sein.
Dies liefert die Banach'sche Konstruktion eines Inhalts auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, der translationsinvariant ist und λ fortsetzt oder auch unsere Integralkonstruktion im 2.Teil dieser Arbeit (2.2). (Vgl. / 1 /.)

$A \sim B \Rightarrow \chi_A = \sum_n \alpha_i \chi_{A_i} + h$ und $\chi_B = \sum_n \alpha_i \chi_{A_i + t_i} + h$, wobei alle $A_i \subset \mathbb{R}$ beschränkt sind, $t_i \in \mathbb{R}$ und $h \in V$.

Setzt man wie in (1.4.3) den Banach'schen Inhalt m zu $\tilde{m}$ auf V fort, so erhält man wegen der T-Invarianz

$m(A) = \sum \alpha_i \cdot m(A_i) + \tilde{m}(h) = \sum \alpha_i \cdot m(A_i + t_i) + \tilde{m}(h) = m(B)$.

Also ist auch $\lambda(A) = \lambda(B)$.

⊠

b) λ von Folgerung a) kann zusätzlich noch spiegelungs-invariant sein;
denn $T \cup \{(X,-X) \mid X \subset \mathbb{R}\}$ transitiv abgeschlossen ist wieder eine schöne Relation, die die verlangte Bedingung erfüllt.

c) Sei $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,\infty\}$ der durch

$\mu(X) := \begin{cases} 0 \text{ , wenn X endlich} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$ gegebene Inhalt.

Die Relation R werde definiert durch:
$ARB \Leftrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $A = B + n$.
Dann ist R schön, μ R-invariant und aus $A \sim B$ folgt:
A und B endlich oder A und B unendlich, also $\mu(A) = \mu(B)$. Somit gibt es nach Satz (1.6.5) ein $\mu^\star: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}^\star$ das feinstes R-invariantes Maß ist.
$\mu^\star(\mathbb{N}) \simeq \infty > 0$.
Also ist $\nu := st(\mu^\star/\mu^\star(\mathbb{N}))$ auch ein R-invariantes Maß: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ mit $\nu(\mathbb{N}) = 1$.

Es gilt $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathrm{Bild}(\nu)$.

Denn sei $n,m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{N} = \sum_{i=0}^{m-1} A+i \text{ , wobei } A := \{j \cdot m \mid j \in \mathbb{N}\} .$$

$$\Rightarrow \nu(A) = 1/m \Rightarrow \nu\Big(\sum_{i=0}^{n-1} A+i\Big) = n/m.$$

Vgl. hierzu auch /2/,S.230 .

d) Sei $R := \{(X,X+q) \mid X \subset \mathbb{R} \text{, beschränkt, } q \in \mathbb{Q}\} \cup \cup \{(X,X) \mid X \subset \mathbb{R}\}$. Dann ist R eine schöne Relation und aus $A \sim B \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(B)$ für $A,B \in \mathcal{L}$.
Wir zeigen, daß für das gem. Satz(1.6.5) existierende feinste R-invariante λ^* gilt:
$\lambda^*(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$.
Es genügt zu zeigen, daß für alle $x \in \mathbb{R}: \lambda^*(\{x\}) > 0$.

Annahme: $\lambda^*(\{x\}) = 0 \Rightarrow$ für alle R-invarianten feinsten Maße μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist $\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow \{x\} \sim \emptyset$
$\Rightarrow \{x\} \sim_1 \emptyset \Rightarrow$ (nach Def.):

$$\chi_{\{x\}} = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{A_i} \quad \text{und} \quad 0 = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \cdot \chi_{A_i+q_i} \text{ , wobei}$$

$A_i \subset \mathbb{R}$ beschränkt (o.E.!), $q_i \in \mathbb{Q}$, $\tau_i \in \{1,-1\}$.

Sei r gemeinsamer Teiler der q_i $(i \leq m)$.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $[-N \cdot r, N \cdot r)$ alle A_i und alle A_i+q_i umfaßt. k_o sei dasjenige der $k \in \mathbb{Z}$, für das $x \in [k_o \cdot r,(k_o+1) \cdot r)$ ist.

Durch Bildung der Durchschnitte der A_i mit den Intervallen $[k \cdot r,(k+1) \cdot r)$ erhält man $\emptyset \neq B_i \subset \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{Z}$ $(i \leq n)$, so daß

$$\text{(I)} \qquad \chi_{\{x\}} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{B_i} \quad ;$$

$$\text{(II)} \qquad 0 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot \chi_{B_i+(z_i \cdot r)} \quad ;$$

und jedes B_i nur in höchstens einem Intervall $[k \cdot r, (k+1) \cdot r)$ $(-N \leq k < N)$ nicht verschwindet.

Def.: $\gamma_k := \Sigma(\sigma_i \mid i \leq n,\ B_i \cap [k\cdot r,(k+1)\cdot r) \neq \emptyset)$

und $\delta_k := \Sigma(\sigma_i \mid i \leq n,\ B_i + (z_i \cdot r) \cap [k\cdot r,(k+1)\cdot r) \neq \emptyset)$.

Nach Gleichung (I) ist $\gamma_k = 0$ für alle $k \neq k_0$ und $\gamma_{k_0} = 1$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{k=-N}^{N-1} \gamma_k = \gamma_{k_0} = 1 .$$

Nach Gleichung (II) ist $\delta_k = 0$ für alle k.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{k=-N}^{N-1} \delta_k = 0 . \quad \text{Widerspruch !}$$

⌛

<u>Vermutung (1.6.7):</u>

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heiße symmetrisch, wenn es $z \in \mathbb{R}$ gibt mit: $z+x \in A \iff z-x \in A$.

Sei S der reflexive und transitive Abschluß von $\{(X,X+t) \mid t \in \mathbb{R},\ X \text{ symmetrisch}\}$ auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.
Dann ist S schön und aus $A \sim(S)\ B$ folgt $\lambda(A)=\lambda(B)$ für $A,B \in \mathcal{L}$.

Für die feinste S-invariante Erweiterung $\lambda^\star$ gilt:
$\lambda^\star(A) = 0 \iff A = \emptyset$.

1.7 σ-Additivität

Im Gegensatz zu dem hier verwendeten Maßbegriff sind Maße im Sinne der klassischen Maßtheorie σ-additiv, d.h. daß für paarweise disjunkte Mengen A_i $(i \in \mathbb{N})$ gilt: $\mu(\Sigma A_i) = \Sigma\mu(A_i)$.
Zwar konnten wir σ-additive Maße zu nonstandard-wertigen mit erheblich erweitertem Definitionsbereich fortsetzen und damit die σ-Additivität des ursprünglichen Maßes auf einem Teilsystem von Mengen erhalten, doch stellt sich die Frage, inwieweit "σ-Additivität" auf dem ganzen Maßraum gelten kann.
Nun hat man bereits Schwierigkeiten, wenn man σ-Additivität für Maße, die ihre Werte nicht in $\mathbb{R}$ sondern in $\mathbb{R}^*$ annehmen, definieren will. $\Sigma\mu(A_i)$ gibt keinen Sinn, wenn der Zahlenkörper nicht vollständig ist. Um die Vollständigkeit zu erzwingen, könnte man versuchen, eine andere als die natürliche (Ordnungs-) Topologie auf $\mathbb{R}^*$ zu verwenden. Aber bekanntlich sind Nonstandard-Modelle der reellen Zahlen immer $\aleph_1$-saturiert, und damit wird jede Uniformität, bezüglich der $\mathbb{R}^*$ vollständig ist, diskret.

Man kann sich behelfen, indem man $\mathbb{R}^*$ vergröbert, d.h. in geeigneter Weise ausfaktorisiert. Diese Technik geht auf A. Robinson zurück. (Vgl./21/,S.76)
Wir zitieren die wesentlichen Ergebnisse:

Definition (1.7.1):

Sei $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$; $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $0<\varepsilon<1$.

$\overline{\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^* \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N}: |x| < \varepsilon^{-n}\}$.

$\underline{\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^* \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N}: |x| < \varepsilon^{n}\}$.

Satz (1.7.2):

a) $\overline{\varepsilon}$ und $\underline{\varepsilon}$ sind Ringe. $\underline{\varepsilon}$ ist maximales Ideal in $\overline{\varepsilon}$.
$\mathbb{R}^{\star\varepsilon} := \overline{\varepsilon}/\underline{\varepsilon}$ ist ein Körper.

b) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{\star\varepsilon}$. Falls $\varepsilon \notin \widetilde{\widetilde{O}}$, ist $\mathbb{R}^{\star\varepsilon} = \mathbb{R}$.

c) $v: \mathbb{R}^{\star\varepsilon} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $v(x) := st(\log_\varepsilon(|x|))$ ist eine nichtarchimedische Bewertung von $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$.

d) $d: \mathbb{R}^{\star\varepsilon} \times \mathbb{R}^{\star\varepsilon} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $d(x,y) := e^{-v(x-y)}$ liefert eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$, bezüglich der $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$ Cauchy-vollständig ist.

e) Ist $\varepsilon \notin \widetilde{\widetilde{O}}$ und damit $\mathbb{R}^{\star\varepsilon} = \mathbb{R}$, so erzeugt d die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$; für $\varepsilon = e^{-1}$ ist d die übliche Abstandsmetrik auf $\mathbb{R}$.

Beweise: s./21/,S.76 ff .

Bemerkung: $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$ ist zwar Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, aber i.a. nicht elementare Erweiterung von $\mathbb{R}$ als Modell der Theorie der reellen Zahlen.

Definition (1.7.3):

$\mathbb{R}^\star$, $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$ seien wie oben. $\pi: \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^{\star\varepsilon} \cup \{\infty,-\infty\}$:

$$\pi(x) := \begin{cases} x \pmod{\underline{\varepsilon}}, & \text{falls } x \in \overline{\varepsilon}, \\ -\infty, & \text{falls } x < \overline{\varepsilon}, \\ \infty, & \text{falls } x > \overline{\varepsilon}. \end{cases}$$

Folgerung: π ist additiv auf $\overline{\varepsilon}$.

Definition (1.7.4):

Sei $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^\star \setminus \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ sei σ-Algebra.
Ein Maß $\mu: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^\star$ heißt σ-additiv(ε), wenn für jede Familie (A_i) $(i\in\mathbb{N})$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}$, für die $(\pi(\mu(\sum_{i\leq m} A_i)))$ $(m\in\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$ bildet, gilt: $\pi(\mu(\sum_{i=0}^{\infty} A_i)) = \lim(\pi(\mu(\sum_{i\leq m} A_i)))$.

Satz (1.7.5):

$\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^*$ ist genau dann σ-additiv(ε), wenn es überall stetig(ε) nach oben oder in ∅ stetig(ε) nach unten ist;

d.h. wenn für jede Folge (A_i) $(i \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{A}$, die monoton gegen A steigt und für die $\pi(\mu(A_i))$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^{*\varepsilon}$ ist, $\lim_{i\to\infty}(\pi(\mu(A_i))) = \pi(\mu(A))$,

oder wenn für jede monotone Nullfolge (B_i) $(i \in \mathbb{N})$ in $\mathfrak{A}$, für die $\pi(\mu(B_i))$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^{*\varepsilon}$ ist, $\lim_{i\to\infty}(\pi(\mu(B_i))) = 0$.

Beweis: Analog zum entsprechenden Satz der Maßtheorie. (Vgl. / 15/)

Mit dem Begriff der σ-Additivität(ε) haben wir die Möglichkeit geschaffen, durch geeignetes Vergröbern (π) die Spur von Grenzprozessen in $\mathbb{R}^*$ auf einem vollständigen $\mathbb{R}^{*\varepsilon}$ zu betrachten. $\mathbb{R}^{*\varepsilon}$ reflektiert allerdings nur einen (zentralen) Ausschnitt von $\mathbb{R}^*$. Über Grenzwertverhalten in den Zahlenbereichen außerhalb von $\overline{\varepsilon}$ liefert die σ-Additivität(ε) keine Aussagen.

Der folgende Satz(1.7.7) gibt uns nichttriviale Beispiele von σ-additiven(ε) Maßen für beliebige infinitesimale, positive ε.

Zur Vorbereitung brauchen wir den

Satz (1.7.6):

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda)$ ein (klassischer) Maßraum und sei λ endlich.

Dann gibt es ein Maß $\nu : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}^*$, für das gilt:

i) $\mathfrak{L}$ ist σ-Algebra* ; d.h. $\mathfrak{L}$ ist Algebra und in dem Nonstandard-Modell $\mathbb{R}^*$ gilt:

ist (A_i) $(i \in \mathbb{N}^\star)$ eine interne Folge in $\mathcal{L}$,
so ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^\star} A_i \in \mathcal{L}$.

ii) $\{A^\star \mid A \in \mathcal{P}(\Omega)\} \subset \mathcal{L}$ und zu einer monotonen Nullfolge $\Phi: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\Phi^\star$ eine Folge in $\mathcal{L}$.

iii) ν ist σ-additiv*, d.h. für eine interne Familie paarweise disjunkter Mengen (A_i) $(i \in \mathbb{N}^\star)$ ist $\nu(\sum_{i \in \mathbb{N}^\star} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}^\star} \nu(A_i)$.

iv) Für $A \in \mathcal{A}$ ist $\nu(A^\star) = \lambda(A)$.

Beweis:
Sei I die Menge aller endlichen Mengen von monotonen Nullfolgen in $\mathcal{P}(\Omega)$.

Sei $E \in I$, $E =: \{(A_i^1), (A_i^2), \ldots, (A_i^m)\}$.

$B_i^j := A_i^j - A_{i+1}^j$.

Dann ist jede Folge (B_i^j) disjunkt $(j \leqq m)$.
Also gibt es nur abzählbar viele Atome C_i $(i \in \mathbb{N})$ aus den $(B_i^1), \ldots, (B_i^m)$.

Sei $\mathcal{A}_E$ die von $\mathcal{A} \cup \{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ erzeugte σ-Algebra.
Nach /8/, Satz 2B, existiert ein σ-additives Maß $\lambda_E: \mathcal{A}_E \to \mathbb{R}$, das λ fortsetzt. Insbesondere ist für $j \leqq m$ $\lim_{i \to \infty}(\lambda_E(A_i^j)) = 0$, da die (A_i^j) Nullfolgen waren.

$\mathcal{U}$ sei ein Ultrafilter auf I, der alle
$\hat{E} := \{D \in I \mid E \subset D\}$ enthält.
$\mathcal{L}$ werde definiert als $\prod_{E \in I} \mathcal{A}_E / \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ Jedes $A \in \mathcal{L}$ ist darstellbar als $\overline{(A_E \mid E \in I)}$ mit $A_E \subset \Omega$.

$\nu(A) := \overline{(\lambda_E(A_E) \mid E \in I)}$ ist eindeutig definiert;
denn wenn $\overline{(A_E)} = \overline{(A'_E)}$, so ist für alle E aus einer Filtermenge $A_E = A'_E$.

$\mathcal{L}$ ist in jeder Komponente σ-Algebra, also σ-Algebra*. Eine monotone Nullfolge (A_i) $(i \in \mathbb{N})$ ist auf der Filtermenge $\widehat{\{(A_i)\}}$ in jedem $\mathcal{A}_E$ enthalten, somit ist $(A_i)^\star$ $(i \in \mathbb{N}^\star)$ eine Folge in $\mathcal{L}$.
Für alle $E \in I$ ist $\lim\limits_{i \to \infty}(\lambda_E(A_i)) = 0$, mit Satz(1.7.5) folgt, daß ν σ-additiv* ist, weil $\lim\limits_{i \to \infty^\star}(\nu(A_i)) = 0$.

⌧

Satz (1.7.7):

Sei (Ω, $\mathcal{A}$, λ) ein Maßraum und λ endlich.
Dann gibt es ein Maß $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^\star$, das σ-additiv(ε) für jedes positive $\varepsilon \in \widetilde{\widetilde{O}}$ ist, und das λ fortsetzt.

Beweis:
Sei ν das nach Satz(1.7.6) existierende Maß: $\mathcal{L} \to \mathbb{R}^\star$.
Definiere $\mu(A) := \nu(A^\star)$ für $A \subset \Omega$.
=> μ ist ein Maß und setzt λ fort.

Derselbe Erweiterungsvorgang wie beim Beweis von Satz(1.7.6) (Ultrapotenz mit I mod $\mathcal{U}$) liefert ein $\mu^\star: \mathcal{P}(\Omega)^\star \to \mathbb{R}^{\star\star}$.
Für $A \in \mathcal{L}$ gilt: $\mu^\star(A) = \overline{(\mu(A_E) \mid E \in I)} = \overline{(\nu(A_E^\star) \mid E \in I)} \in \mathbb{R}^{\star\star}$.
Nach Definition ist $\nu(A) = \overline{(\lambda_E(A_E) \mid E \in I)}$.
Sei $\delta \in \mathbb{R}^\star$, $0<\delta$: δ ist darstellbar als $\overline{(\delta_E \mid E \in I)}$ mit $\delta_E \in \mathbb{R}$. Es gibt eine Filtermenge F, so daß für alle $E \in F$: $|\nu(A_E^\star) - \lambda_E(A_E)| < \delta_E$,
also ist $|\overline{(\nu(A_E^\star) \mid E \in I)} - \overline{(\lambda_E(A_E) \mid E \in I)}| < \delta$.
=> $\mu^\star|\mathcal{L} \simeq \nu$ (bzgl. $\mathbb{R}^\star \prec \mathbb{R}^{\star\star}$).
Sei $0<\varepsilon \in \widetilde{\widetilde{O}}$ und $\Phi: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Omega)$ eine monotone Nullfolge

so daß $\pi(\mu(\Phi(i)))$ $(i \in \mathbb{N})$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$ ist.
O.B.d.A. gilt für alle $i,m \in \mathbb{N}$: $\mu(\Phi(i)) - \mu(\Phi(i+m))$
$< \varepsilon^i$. $\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^{\star\star}$ gilt für alle $i,m \in \mathbb{N}^\star$:
$\mu^\star(\Phi^\star(i)) - \mu^\star(\Phi^\star(i+m)) < \varepsilon^i$.

ν ist nach Satz (1.7.6) σ-additiv*; daher ist
$\lim\limits_{i\to\infty^\star} \nu(\Phi^\star(i)) = \nu(\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}^\star} \Phi^\star(i)) = \nu(\emptyset) = 0$.
Sei $0 < \delta < \varepsilon^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}^\star$.
Dann gibt es $k \in \mathbb{N}^\star$: $\nu(\Phi^\star(k)) < \delta$.
Weil $\mu^\star|\mathcal{L} \simeq \nu$ und $\Phi^\star$ Folge in $\mathcal{L}$ ist, gibt es $k \in \mathbb{N}^\star$:
$\mu^\star(\Phi^\star(k)) < \delta$.
$\Rightarrow$ (s.o.) für alle $i \in \mathbb{N}^\star$: $\mu^\star(\Phi^\star(i)) < \varepsilon^i+\delta < 2\cdot\varepsilon^i$.
Zurück in $\mathbb{R}^\star$: für alle $i \in \mathbb{N}$: $\mu(\Phi(i)) < 2\cdot\varepsilon^i$.
$\Rightarrow \lim(\pi(\mu(\Phi(i)))) = 0$ in $\mathbb{R}^{\star\varepsilon}$.

Nach Satz (1.7.5) genügt dies für die σ-Additivität(ε).

⌛

2. I N T E G R A L E

2.1 Allgemeines

In der klassischen Maßtheorie sind die Begriffe Maß und Integral sehr verwandt: Jedes Integral definiert in natürlicher Weise ein Maß, andererseits läßt sich jedes Integral einer reellwertigen positiven Funktion f als geeignetes Maß der Menge $\{(\omega,x) \mid 0 \leq x \leq f(\omega)\} \subset \Omega\times\mathbb{R}$ auffassen.
Diese Beziehungen sollen auch für Maße und Integrale in unserem Sinn gelten. Bereits im ersten Teil dieser Arbeit hatten wir aus technischen Gründen Maße verwendet, die eigentlich schon Integrale waren, nämlich auf den Mengen $\tilde{f}$ (vgl.1.4.11).

Der Schritt vom Maß zum Integral ist hier jedoch größer und etwas willkürlicher als bei klassischen σ-additiven Maßen. Denn wegen der fehlenden Vollständigkeit von $\mathbb{R}^\star$ ist die Konstruktion des Integrals durch Annäherung über einfache Treppenfunktionen nicht möglich; zudem sollen ja auch Integrale für alle Funktionen, und nicht nur solche, die sich aus elementaren annähern lassen, definiert werden.

Unabhängig von einem Maß, aber von ähnlichen Überlegungen wie in 1.1 ausgehend, definieren wir den Begriff des Integrals:

Definition (2.1.1):

Sei Ω eine Menge, U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von Abb$(\Omega,\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^\star$ eine Erweiterung von $\mathbb{R}$.

Ein Funktional $I: U \to \mathbb{R}^\star$ heißt Integral auf U, wenn es positiv $\mathbb{R}$-linear ist, d.h. wenn

i) $f \in U,\ f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ und

ii) $I(\alpha\cdot f+g) = \alpha\cdot I(f) + I(g)$.

Ist $U = Abb(\Omega,\mathbb{R})$, so nennen wir I auch Integral auf Ω.

<u>Folgerung und Definition (2.1.2):</u>

Ist $I: U \to \mathbb{R}^*$ ein Integral, so ist $\mu_I: A \mapsto I(\chi_A)$ ein Maß auf $\mathfrak{K} := \{A \subset \Omega \mid \chi_A \in U\}$ und heißt das zu I gehörige Maß.

<u>Definition (2.1.3):</u>

a) Sei R eine Relation auf $U \subset Abb(\Omega,\mathbb{R})$.
   Ein Integral I auf U heißt R-invariant, wenn aus fRg folgt: $I(f) = I(g)$.

b) Seien I und J Integrale auf U.
   I heißt feiner als J ("I>>J"), wenn gilt:
   $f,g \in U,\ f \leqq g,\ J(f) < J(g) \Rightarrow I(f) < I(g)$.

<u>Satz (2.1.4):</u>

Sei Ω eine Menge, U UVR von $Abb(\Omega,\mathbb{R})$ und R eine Relation auf U.
Dann gibt es ein feinstes R-invariantes Integral auf U.

Bemerkung: Dieser Satz entspricht dem Satz (1.3.3). Der Beweis verläuft entsprechend, wenn man statt Maßen Integrale einsetzt.

In ähnlicher Weise ließen sich jetzt weitere Ergebnisse des 1. Teils für Integrale nachvollziehen, teilweise allerdings mit größerem technischen Aufwand. Insbesondere erhält man (analog zu 1.5 und 1.6) eine echte "Verbesserung" des Lebesgue-Integrals.

Im folgenden sollen noch einige Probleme verfolgt werden, die sich im Rahmen von Integralen besser behandeln lassen als nur mit Maßen.

2.2 Fast translationsinvariante Integrale auf $\mathbb{R}$

In den Arbeiten von Bernstein/Wattenberg und Shorb (/ 5 /,/32/) wird eine abgeschwächte Translationsinvarianz für Maße und Integrale eingeführt.
Sie erlaubt es, gewisse Mengen, bzw. Funktionen, denen sonst wegen der geforderten Invarianz derselbe Maß-, bzw. Integralwert zukommen müßte, noch zu trennen.
Es entspricht sicher der Intuition, etwa die Menge $\mathbb{N}$ als "größer" anzusehen als die leere Menge (nach 1.4 ist aber $\mathbb{N} \sim \emptyset$!), dafür andererseits geringfügige (infinitesimale) Ungenauigkeiten ("Reibungsverluste") bei Translationen hinzunehmen.
Insofern mögen die fast translationsinvarianten Integrale eine geeignete Formalisierung des intuitiv erfaßten Sachverhalts darstellen.

Definition (2.2.1):

a) $\mathcal{L}$ bezeichne die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Das Lebesgue-Integral werde mit L-$\int$ bezeichnet.

b) $\mathcal{F} := \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;
$\mathfrak{M} := \{f \in \mathcal{F} \mid \text{es gibt } g \in \mathcal{L} : |f| \leq g\}$.

c) Sei $f \in \mathcal{F}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann werde $f\dagger t \in \mathcal{F}$ durch $f\dagger t(x) := f(x-t)$ definiert.

d) Ein Integral I auf $U \subset \mathcal{F}$ heißt fast translationsinvariant auf $M \subset U$, wenn für alle $f \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ $I(f) \simeq I(f\dagger t)$ ist (bzgl. $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$, wobei I Werte in $\mathbb{R}^*$ annimmt).

Satz (2.2.2):

Es gibt ein Integral $\int$ auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

i) $\int f \simeq \text{L-}\int f d\lambda$ für $f \in \mathcal{L}$.

ii) $\int$ ist fast translationsinvariant auf $\mathfrak{M}$.

iii) $\int f > 0$ für $f \geq 0$, $f \neq 0$.

Zum Beweis konstruieren wir zunächst ein Integral auf $\mathfrak{f}$, das i) erfüllt. Mit einer Ultralimeskonstruktion bis $\aleph_1$, bei der schrittweise die Translationsinvarianz für die einzelnen $t \in \mathbb{R}$ erzwungen wird, werden wir daraus das geforderte Integral erhalten. Für den ersten Schritt brauchen wir:

<u>Satz (2.2.3):</u>

Es gibt ein Integral $\int : \mathfrak{f} \to \mathbb{R}^\star$, für das gilt:

$\int f \approx L\text{-}\int f \, d\lambda$ für alle $f \in \mathcal{L}$.

Beweis:

Sei $S := \{E \subset \mathbb{R} \mid E \text{ endlich}, E \neq \emptyset\}$ und

$\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter auf S, der alle $\hat{A} := \{B \in S \mid A \subset B\}$ enthält.

$\mathbb{R}^\star := \mathbb{R}^S / \mathfrak{U}$.

Def. $I : \mathfrak{f} \to \mathbb{R}^\star$: $I(f) := \overline{(1/|E| \cdot \sum_{x \in E} f(x) \mid E \in S)}$.

I ist Integral auf $\mathfrak{f}$, da es positiv und $\mathbb{R}$-linear ist.

Sei $c := I(\chi_{[0,1)}) = \overline{(1/|E| \cdot |E \cap [0,1)| \mid E \in S)}$.

Da $\widehat{\{0\}} \in \mathfrak{U}$, ist $c > 0$.

Def. $\int := I/c$. Dann ist $\int(\chi_{[0,1)}) = 1$.

Wenn für alle $f \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$ die Menge

$$U_{f,\varepsilon} := \{E \in S \mid E \cap [0,1) \neq \emptyset \text{ und} \left| \frac{\sum_{x \in E} f(x)}{|E \cap [0,1)|} - L\text{-}\int f d\lambda \right| < \varepsilon\}$$

aus $\mathfrak{U}$ ist, gilt die Behauptung $\int f \approx L\text{-}\int f d\lambda$.

Also müssen wir zeigen, daß $\mathfrak{U}$ so gewählt werden kann.

Sei $A \in S$, $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$.

Es ist zu zeigen, daß es ein $E \in S$ gibt mit
$A \subset E$ und $E \in U_{f_1,\varepsilon} \cap \dots \cap U_{f_n,\varepsilon}$.

Weil $L\text{-}\int f_i d\lambda < \infty$ für $i \leq n$, existiert ein Intervall $K \supset [0,1)$, so daß $A \subset K$ und für $i \leq n$:

$$\left| L\text{-}\int_{\mathbb{R}} f_i d\lambda - L\text{-}\int_K f_i d\lambda \right| < \varepsilon/2 .$$

l sei die Länge von K.

Zu jedem f_i $(i \leq n)$ gibt es Zerlegungen $K = \sum_{j=1}^{k} K_j$ in meßbare Mengen mit $\lambda(K_j) = l/k$ für $j \leq k$ und $x_1 \in K_1, \dots, x_k \in K_k$ mit:

$$\left| L\text{-}\int_K f_i d\lambda - \sum_{j=1}^{k} \lambda(K_j) \cdot f_i(x_j) \right| =$$

$$= \left| L\text{-}\int_K f_i d\lambda - l/k \cdot \sum_{j=1}^{k} f_i(x_j) \right| < \varepsilon/2 .$$

k kann dabei so groß sein, daß man o.E. eine gemeinsame Zerlegung (K_j) $(j \leq k)$ für alle f_i $(i \leq n)$ verwenden kann. Zudem kann die Zerlegung so fein sein, daß $|K_j \cap A| \leq 1$ und $K_j \subset [0,1)$ oder $K_j \cap [0,1) = \emptyset$ für alle $j \leq k$.
Ebenso kann man - bei genügend großem k - die x_j für alle $i \leq n$ gemeinsam wählen, so daß $E := \{x_1,\dots,x_k\}$ A umfaßt und:

$$\left| L\text{-}\int_K f_i d\lambda - l/k \cdot \sum_{j=1}^{k} f_i(x_j) \right| < \varepsilon/2 \text{ für alle } i \leq n.$$

Aus Maßgründen muß k genau l-mal so groß sein wie die Anzahl der K_i $(i \leq n)$, die Teilmenge von $[0,1)$ sind. Daher $|E \cap [0,1)| = k/l$.

Für alle $i \leq n$ gilt demnach:

$$\frac{\sum_{x \in E} f_i(x)}{|E \cap [0,1)|} = \frac{l}{k} \cdot \sum_{x \in E} f_i(x) . \qquad \Longrightarrow$$

$$\left| \frac{\sum_{x \in E} f_i(x)}{|E \cap [0,1)|} - L\text{-}\int_K f_i d\lambda \right| < \varepsilon/2 .$$

Also auch $\left| \dfrac{\sum_{x \in E} f_i(x)}{|E \cap [0,1)|} - L\text{-}\int_{\mathbb{R}} f_i \, d \right| < \varepsilon.$

$\Rightarrow E \in U_{f_1,\varepsilon} \ldots U_{f_n,\varepsilon}$ und $A \subset E$, d.h. die Mengen $U_{f,\varepsilon}$ $(f \in \mathcal{L},\ \varepsilon > 0)$ und $\hat{A}$ $(A \in S)$ bilden zusammen eine Filtersubbasis, die zum gewünschten Ultrafilter $\mathcal{U}$ erweitert werden kann.

⌧

Beweis von Satz(2.2.2):

$\int_0$ und S seien definiert wie im Beweis von Satz(2.2.3).

$\mathbb{R}^0 := \mathbb{R}^\star$. ($\mathbb{R}^\star$ aus dem letzten Satz), $\int_0 := \int$.

Durch transfinite Induktion definieren wir $\int_\alpha$ für $\alpha \leq \aleph_1$:

Sei $\int_\alpha : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^\alpha$ bereits definiert:

$$\int_{\alpha+1} : \mathcal{F} \to (\mathbb{R}^\alpha)^S / \mathcal{U}_{\alpha+1} =: \mathbb{R}^{\alpha+1},$$

$$\int_{\alpha+1} f := \overline{\left(1/|E| \cdot \sum_{x \in E^\alpha} \int (f \dagger x) \;\middle|\; E \in S\right)} .$$

Für γ Limeszahl:

$$\int_\gamma : \mathcal{F} \to \prod_{\alpha<\gamma} \mathbb{R}^\alpha / \mathcal{U}_\gamma =: \mathbb{R}^\gamma ,$$

$$\int_\gamma f := \overline{\left(\int_\alpha f \;\middle|\; \alpha<\gamma\right)} .$$

Bei dieser Definition seien die $\mathcal{U}_\alpha$ noch geeignet zu definierende freie Ultrafilter.

$\mathbb{R}^{\aleph_1}$ ist dann ein Nonstandardmodell der reellen Zahlen (vgl. / 4 /,S. 161).

Für jedes $\alpha \leq \aleph_1$ ist $\int_\alpha$ positiv und $\mathbb{R}$-linear, wie man leicht durch transfinite Induktion sieht, also ein Integral auf $\mathbb{R}$.

<u>Lemma 1:</u> Sei $\alpha \leq \beta \leq \aleph_1$.

Ist $\int_\alpha$ fast invariant gegen Translation um eine reelle Zahl t auf $\mathcal{F}$, so gilt dies auch für $\int_\beta$.

Beweis durch transfinite Induktion:

Für $\delta \geq \alpha$ gelte die Behauptung. Sei $f \in \mathcal{F}$ und $t \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\delta+1} f - \int_{\delta+1} f\dagger t\ (E) = 1/|E| \cdot \sum_{x \in E} \Big(\int_{\delta} f\dagger x - \int_{\delta} f\dagger(x+t)\Big) \simeq 0,$$

da $\int f\dagger x \simeq \int f\dagger(x+t)$ nach I.V. angewandt auf $f\dagger x \in \mathcal{F}$.

$\int_{\delta+1} (f - f\dagger t)$ hat also eine Darstellung im Ultraprodukt von $\mathbb{R}^{\delta}$, bei der jede Komponente $\simeq 0$ ist (bzgl. $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^{\delta}$). Somit ist auch $\int_{\delta+1} (f - f\dagger t) \simeq 0$.

Sei γ eine Limeszahl und die Behauptung gelte für alle δ mit $\alpha \leq \delta < \gamma$.

$$\int_{\gamma}(f - f\dagger t) = \overline{\Big(\int_{\delta}(f - f\dagger t)\ \Big|\ \delta < \gamma\Big)} \simeq 0. \quad \text{(mit I.V.)}$$

$\boxtimes$

<u>Lemma 2:</u>

Für $f \in \mathcal{L}$ und $\alpha \leq \aleph_1$ ist $\int_{\alpha} f \simeq L\text{-}\int f d\lambda$.

Beweis durch transfinite Induktion:

Für $\alpha = 0$ gilt die Behauptung nach Konstruktion von $\int_0$.

$$\int_{\alpha+1} f\ (E) = 1/|E| \cdot \sum_{x \in E} \int_{\alpha} f\dagger x \simeq_{\text{(I.V.)}} 1/|E| \cdot \sum_{x \in E} L\text{-}\int f\dagger x d\lambda$$

$$= 1/|E| \cdot \sum_{x \in E} L\text{-}\int f d\lambda = L\text{-}\int f d\lambda .$$

Sei γ Limeszahl : $\int_{\gamma} f\ (\delta) = \int_{\delta} f \simeq L\text{-}\int f d\lambda$ (nach I.V.)

In beiden Fällen folgt aus der komponentenweisen Fast-Übereinstimmung die Behauptung.

$\boxtimes$

Wegen der beiden Lemmata genügt es, zu zeigen, daß die Fast-Translationsinvarianz für jedes t bei irgendeinem $\int_{\alpha}$ erzwungen wird.

Dies erreichen wir durch geeignete Ultrafilter $\mathcal{U}_{\alpha}$ für Nachfolgerzahlen $\alpha \leq \aleph_1$.

Für Limeszahlen γ können die $\mathcal{U}_{\gamma}$ beliebige freie Ultrafilter auf γ sein.

Sei im folgenden $t \in \mathbb{R}$ fest.

Zu $c,\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definieren wir $[c,\varepsilon]_t :=$

$\{Z \in S \mid$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in S$ mit $Z = \sum_{i=0}^{n} (Y+i\cdot t)$

und $(2\cdot c)/n < \varepsilon\}$. Wenn keine Verwechslung möglich ist, lassen wir den Index t auch weg.

$\Rightarrow [c,\varepsilon] \neq \emptyset$ und $\{[c,\varepsilon] \mid c,\varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ ist eine Filtersubbasis auf S, weil $[c_1,\varepsilon_1] \cap \ldots \cap [c_n,\varepsilon_n]$ Obermenge von $[\max(c_i \mid i \leq n)\ ,\ \min(\varepsilon_i \mid i \leq n)\ ]$ ist.

Jedem $t \in \mathbb{R}$ werde jetzt eine Nachfolgerzahl $\alpha_t < \aleph_1$ so zugeordnet, daß $\alpha_t \neq \alpha_s$ für $t \neq s$.

$\mathfrak{U}_{\alpha_t}$ sei ein über $\{[c,\varepsilon]_t \mid c,\varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ gebildeter Ultrafilter auf S.

Sei $f \in \mathcal{M}$; dann existiert $g \in \mathcal{L}$ mit $|f| \leq g$.

$c := 1 + L\text{-}\int g d\lambda$; $\varepsilon > 0$.

Für alle $Z \in [c,\varepsilon]_t$ gilt dann:

$$\int_{\alpha_t} (f - f\dagger t)(Z) = 1/|Z| \cdot \sum_{x\in Z} \int_{\alpha_t - 1} (f\dagger x - (f\dagger t)\dagger x) =$$

$$1/|Z| \cdot \Big(\sum_{x\in Y} \int_{\alpha_t - 1} (f\dagger x - f\dagger (x+t)) +$$

$$+ \sum_{x\in Y+t} \int_{\alpha_t - 1} (f\dagger x - f\dagger (x+t) + \ldots .$$

$$\ldots . + \sum_{x\in Y+n\cdot t} \int_{\alpha_t - 1} (f\dagger x - f\dagger (x+t) \Big) .$$

Die Gleichung gilt, weil $Z = \sum_{i=0}^{n} Y+i\cdot t$ nach Def. .

Da jeweils der Subtrahend unter dem Integral gleich dem Minuend unter dem Integral im nächsten Glied ist (falls man die Summen hineinzieht), verbleibt:

$$\int_{\alpha_t} (f - f\dagger t)(Z) = 1/|Z| \cdot \Big(\sum_{x\in Y} \int_{\alpha_t - 1} f\dagger x -$$

$$- \sum_{x\in Y} \int_{\alpha_t - 1} f\dagger (x+n\cdot t) \Big) \leq 1/(n\cdot |Y|)\cdot (|Y|\cdot c + |Y|\cdot c) =$$

$2c/n < \varepsilon$. (Weil $\int_{\alpha_t - 1} f\dagger x \leq \int_{\alpha_t - 1} g\dagger x \approx L\text{-}\int g d\lambda < c$.)

$\int_{\alpha_{t^{-1}}}(f - f\dagger t)(E)$ ist also auf einer ganzen Filtermenge beliebig klein.

$\Rightarrow \int_{\alpha_t} f \simeq \int_{\alpha_t} f\dagger t$.

Lemma 1 liefert, daß für $\int := \int_{\aleph_1}$ gilt:

$\int f \simeq \int f\dagger t$ für alle $f \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 2 stellt sicher, daß $\int f \simeq L\text{-}\int f d\lambda$ für alle $f \in \mathcal{L}$. Somit sind i) und ii) erfüllt.

Daß iii) gilt, folgt unmittelbar aus der Definition der $\int_{\alpha}$.

⌛

Bemerkung:
Satz (2.2.2) stellt eine wesentliche Verallgemeinerung des Ergebnisses von Shorb(/32/) dar. Zudem ist die hier verwendete Methode völlig verschieden: Unser Beweis ist "konstruktiver" und auch kürzer, benützt allerdings spezielle Nonstandard-Modelle, nämlich Ultraprodukte und -limites.

Der Satz läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten auf Fast-Spiegelungsinvarianz erweitern. Zum Beweis nimmt man in der Indexmenge S nur Mengen, die punktsymmetrisch zu O sind. Das beeinträchtigt den weiteren Beweisablauf nicht, erzwingt aber die exakte Invarianz des Integrals bei Spiegelung um O. Durch Kombination von Translationen und Spiegelung um O erhält man Fast-Spiegelungsinvarianz um jeden Punkt.

2.3 Proportionale Translationsinvarianz

In Satz (2.2.2) konnten wir die Fast-Translationsinvarianz nur auf $\mathfrak{M}$ verlangen. Offensichtlich kann sie für Funktionen mit unendlich großem Integralwert auch nicht gelten ($\int \chi_{(0,\infty)} \simeq \int \chi_{(1,\infty)} + 1$!). Es scheint aber eine plausible Forderung zu sein, daß die Größe der maximalen Integralabweichung bei Verschiebungen proportional zur Größe der Integralwerte sein soll.

Definition (2.3.1):

Sei $M \subset \mathcal{F}$. ($\mathcal{F}$ wie in 2.2)
Ein Integral $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^*$ heißt proportional translationsinvariant auf M, wenn für jedes $f \in M$ mit $\int f \neq 0$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f{\dagger}t \; / \int f \simeq 1 \; .$$

Der Begriff der proportionalen Translationsinvarianz stammt ebenfalls von Shorb(/32/), wurde dort allerdings nur für Maße formuliert. Shorb stellte die Vermutung auf, daß es eine proportional translationsinvariante Nonstandarderweiterung des Lebesgue-Maßes gebe, die nur der leeren Menge den Wert 0 zuordnet. Wir zeigen, daß die Vermutung für Integrale i.a. falsch ist und geben Bedingungen an, unter denen proportionale Translationsinvarianz gelten kann.

Satz (2.3.2):

Sei $\int$ eine Nonstandarderweiterung von L-$\int$.
Gilt $\int f > 0$ für alle $f \geq 0$, $f \neq 0$, so ist $\int$ nicht proportional translationsinvariant auf $\mathfrak{M}$.

Beweis:

Sei $q_0, q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1)$.

Zu jedem $p \in \mathbb{Q}$ gibt es genau ein $z_p \in \mathbb{Z}$ und ein $i_p \in \mathbb{N}$, so daß $p = z_p + q_{i_p}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $q_{i_p} = q_{i_{(p \pm n)}}$.

Def. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(p) := \begin{cases} 2^{z_p} \cdot q_{i_p} & \text{für } p \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sonst} . \end{cases}$$

Weil $\{x | f(x) \neq 0\}$ Lebesgue-Nullmenge ist, gilt $f \in \mathfrak{M}$.

$f \geqq 0$ und $f \neq 0 \Rightarrow$ (nach Vor.) $\int f > 0$.

Für $p \in \mathbb{Q}$: $f\dagger 1(p) = f(p-1) = 1/2 \cdot f(p)$.

Für $x \notin \mathbb{Q}$: $f\dagger 1(x) = f(x-1) = 0 = 1/2 \cdot f(x)$.

Somit $f\dagger 1 = 1/2 \cdot f$.

$\Rightarrow \int f\dagger 1 = 1/2 \cdot \int f \Rightarrow \int f\dagger 1 / \int f = 1/2 \not\approx 1$.

⌛

Bemerkung: Aus dem letzten Beispiel ist ersichtlich, daß proportionale Translationsinvarianz für Funktionen mit infinitesimalem Integral i.a. nicht möglich ist (selbst auf $\mathcal{L}$ nicht). Andererseits kann es aber auch keine Nonstandarderweiterung von L-$\int$ geben, die auf $M := \{f \in \mathcal{F} | \int f \not\approx 0\}$ proportional translationsinvariant ist, wie aus folgender Funktion ersichtlich ist:

$f(x) := 2^z$, falls $x \in [z,z+1)$ $(z \in \mathbb{Z})$.

<u>Satz (2.3.3):</u>

Es gibt ein Integral $\int$ auf $\mathbb{R}$ mit:

i) $\int f \approx$ L-$\int f d\lambda$ für $f \in \mathcal{L}$.

ii) $\int$ ist proportional translationsinvariant auf
$M := \{f \in \mathcal{F} | f \geqq 0$, f beschränkt, $\int f \not\approx 0\}$.

iii) $\int f > 0$ für $f \geqq 0, f \neq 0$.

Beweis:

Sei J das nach Satz (2.2.2) existierende Integral: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}^*$.

Sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^{*\mathbb{N}}/\mathcal{U}$.

Def. zu $x \in \mathbb{R}^+$ $\hat{x} := (-x,x)$.

$\int : \mathcal{F} \to \tilde{\mathbb{R}}$ werde komponentenweise definiert:

$$\int f\,(n) := J(f \cdot \chi_{\hat{n}}) \ .$$

Zu zeigen:

1. $\int$ ist ein Integral auf $\mathbb{R}$:

   $\int$ ist positiv und für alle $n \in \mathbb{N}$, $f,g \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

   $\int(\alpha f+g)(n) = J((\alpha f+g)\cdot\chi_{\hat{n}}) = \alpha\cdot J(f\cdot\chi_{\hat{n}}) + J(g\cdot\chi_{\hat{n}}) =$

   $\alpha\cdot\int f(n) + \int g(n)$.

2. $\int f > 0$ für $f \geqq 0$, $f \neq 0$:

   Es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß für $m \geqq n$ $f\cdot\chi_{\hat{m}} \neq 0$.

   Damit ist für alle $m \geqq n$ (Filtermenge!)

   $J(f\cdot\chi_{\hat{m}}) > 0 \Rightarrow \int f > 0$.

3. $\int f \approx L\text{-}\int f d\lambda$ für $f \in \mathcal{L}$:

   $\lim\limits_{n\to\infty}(L\text{-}\int f\cdot\chi_{\hat{n}} d\lambda) = L\text{-}\int f d\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}(st(J(f\cdot\chi_{\hat{n}})))$.

   $\Rightarrow$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geqq n$: $|J(f\cdot\chi_{\hat{m}}) - L\text{-}\int f d\lambda| < \varepsilon$.

   $\Rightarrow \int f \approx L\text{-}\int f d\lambda$.

4. $\int f\dagger t \,/\, \int f \approx 1$ für alle $f \in M$, $f \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}$:

   <u>Fall 1:</u> $\int f \approx \infty$.

   Für alle $c \in \mathbb{R}$ gibt es $m_c \in \mathbb{N}$, so daß $J(f\cdot\chi_{\hat{n}}) > c$ für alle $n \geqq m_c$.

   Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$.

   Weil f beschränkt ist, gibt es $s \in \mathbb{R}$, so daß $|J(f\cdot\chi_{\hat{n}}) - J((f\dagger t)\cdot\chi_{\hat{n}})| < s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Wähle $c \in \mathbb{R}^+$ so groß, daß $|c\pm s \,/\, c - 1| < \varepsilon$.

   $\Rightarrow$ für alle $n \geqq m_c$:

   $$\left|\frac{J((f\dagger t)\cdot\chi_{\hat{n}})}{J(f\cdot\chi_{\hat{n}})} - 1\right| \leqq \left|\frac{J(f\cdot\chi_{\hat{n}}) \pm s}{J(f\cdot\chi_{\hat{n}})} - 1\right| < \varepsilon \ .$$

$\Rightarrow \frac{\int f\dagger t}{\int f} \simeq 1$, da ε beliebig klein war und $\{n | n \geqq m_c\}$ Filtermenge ist.

Fall 2: $\int f < \infty$.

$\lim_{n\to\infty} (st(J(f\cdot\chi_{\hat{n}}))) = st(\int f)$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$.

Weil die Funktion $x \to J(f\cdot\chi_{\hat{x}}))$ für $x \geqq 0$ monoton aufsteigend ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle Intervalle $I \supset \hat{n}$:

$|J(f\cdot\chi_{\hat{n}}) - J(f\cdot\chi_I)| < \varepsilon/2$.

Für alle $m > n+|t|$ gilt dann:

$|J(f\cdot\chi_{\hat{m}}) - J(f\cdot\chi_{\hat{n}})| < \varepsilon/2$ und

$|J((f\dagger t)\cdot\chi_{\hat{m}}) - J(f\cdot\chi_{\hat{n}})| = |J((f\cdot\chi_{\hat{m}-t})\dagger t) - J(f\cdot\chi_{\hat{n}})| \simeq$

(weil J fast transl.inv.) $\simeq |J(f\cdot\chi_{\hat{m}-t}) - J(f\cdot\chi_{\hat{n}})| <$

$< \varepsilon/2$; denn $\hat{m}-t \supset \hat{n}$.

$\Rightarrow |J(f\cdot\chi_{\hat{m}}) - J((f\dagger t)\cdot\chi_{\hat{m}})| < \varepsilon$ für alle $m > n+|t|$.

Also $\int f\dagger t \simeq \int f$.

Nach Voraussetzung war $\int f$ (und damit auch $\int f\dagger t$) weder unendlich klein noch unendlich groß. Deshalb gilt auch: $\frac{\int f\dagger t}{\int f} \simeq 1$. ⌛

Das somit erhaltene Integral "verbessert" also das von Satz (2.2.2) um die proportionale Translationsinvarianz auf beschränkten, nichtnegativen Funktionen mit unendlich großem Integralwert.

Insbesondere gilt auch die Fast-Translationsinvarianz des induzierten Maßes auf allen Mengen mit endlichem Maßwert (eine weitere von Shorb geäußerte Vermutung) .

Ob der letzte Satz auch für $M := \{f \in \mathcal{F} | f \geqq 0$, f beschränkt$\}$ gilt, wissen wir nicht. Für $M := \{f \in \mathcal{F} |$ f beschr.,$\int f \neq 0\}$ gilt er nicht, wenn $\int \chi_{\mathbb{R}^+} \simeq \int \chi_{\mathbb{R}^-}$ sein soll.

2.4 Positive $\mathbb{R}^*$-wertige Linearformen

Nach unserer Definition ist ein Integral eine positive $\mathbb{R}^*$-wertige Linearform auf einem Raum V reellwertiger Funktionen. Bei der Konstruktion feinster Integrale mit vorgegebener Invarianzeigenschaft besteht die Hauptschwierigkeit darin, Linearität und Positivheit zu vereinigen.
Setzt man (wie in 1.4.1) $f \sim g$ genau dann, wenn alle Integrale mit der geforderten Invarianzeigenschaft auf f und g gleiche Werte annehmen, so wird mit $U := \{f \in V \mid f \sim 0\}$ ein Untervektorraum von V definiert. Über Repräsentanten setzt sich die partielle Ordnung des Funktionenraums auf V/U fort ($\bar{f} > 0 :\Leftrightarrow f > 0$; eindeutig!). Die Aufgabe ein feinstes invariantes Integral zu konstruieren reduziert sich damit auf die Konstruktion einer positiven und injektiven Linearform $V/U \to \mathbb{R}^*$.
Dies motiviert die Abstraktion von Integralen zu positiven Linearformen.

Definition (2.4.1):

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
$(V, \leq)$ heißt partiell geordneter Vektorraum, wenn gilt:

i) $\leq$ ist eine partielle Ordnung auf der Menge V.
ii) $x \leq 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \leq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
iii) $x \leq y \Rightarrow x+c \leq y+c$ für alle $x,y,c \in V$.

(vgl. /9/,/11/)

Folgerung: $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x$.

Statt $a \leq b$ schreiben wir auch $b \geq a$.

Definition (2.4.2):

Sei $(V, \leq)$ ein partiell geordneter Vektorraum.

Eine Linearform $I: V \to \mathbb{R}^\star$ ($\mathbb{R}^\star \succ \mathbb{R}$) heißt positiv, wenn $I(x) \geqq 0$ für $x \succeq 0$.

Beispiel: $(\mathrm{Abb}(\Omega,\mathbb{R}), \preceq)$ mit $f \preceq g :\iff f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ ist ein partiell geordneter Vektorraum. Jedes Integral darauf ist eine positive Linearform.

Satz (2.4.3):

Zu jedem partiell geordneten Vektorraum $(V,\preceq)$ gibt es eine positive Linearform $I: V \to \mathbb{R}^\star$, die injektiv ist.

Beweis:

Sei $P := \{x \in V \mid 0 \neq x \succeq 0\} \Rightarrow P \cap -P = \emptyset$.
I sei die Menge aller Linearformen von V nach $\mathbb{R}$.
Zu $x \in V$ sei $\hat{x} := \{\phi \in I \mid \phi(x) > 0\}$.
Seien $x_1, \ldots, x_n \in P$ gegeben. Dann ist der von den x_i $(i \leqq n)$ erzeugte positive Konus K konvex, und weil $K \subset P$, ist $K \cap -K = \emptyset$.
Nach dem Hilfssatz von 1.6.4 gibt es daher eine Hyperebene H in V, die K von $-K$ trennt, mit $H \cap K = \emptyset$.
Also gibt es einen Homomorphismus $\phi: V \to \mathbb{R}$ mit $\phi|_K > 0$. Insbesondere ist $\phi \in \hat{x}_i$ für alle $i \leqq n$. D.h., die $\hat{x}$ $(x \in V)$ haben die "endliche Durchschnittseigenschaft". $\Rightarrow$ Es gibt einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf I, der alle $\hat{x}$ enthält für $x \in P$.
$\mathbb{R}' := \mathbb{R}^I/\mathfrak{U}$.
Def.: $\Phi: V \to \mathbb{R}' : \Phi(x) := \overline{(\phi(x) \mid \phi \in I)}$
Φ ist in jeder Komponente linear, also auch selbst Linearform.
Sei $x \in P \Rightarrow$ für alle $\phi \in \hat{x}$ (Filtermenge!) gilt $\phi(x) > 0 \Rightarrow \Phi(x) > 0$.

Sei B eine Basis von V und κ eine Kardinalzahl grösser als $|P|, |B|, |\mathbb{R}|$.

$\mathbb{R}^\star \succ \mathbb{R}'$ sei κ-saturiert.
Dann gibt es $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}^\star$ mit
$\varepsilon < \{|\Phi(x)|/n \mid x \in V, n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}'^{+}$.
Außerdem gibt es $|B|$ viele über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen δ_b $(b \in B)$ in $\mathbb{R}^\star$ mit $0 < \delta_b < \varepsilon$.

Definiere die Linearform $I: V \to \mathbb{R}^\star$ durch:
$I(b) := \delta_b + \Phi(b)$ für $b \in B$.
Sei $x \in V$, $x \neq 0$. $\Rightarrow$ $x = \sum_{b \in B} \xi_b \cdot b$ mit $\xi_b \in \mathbb{R}$, $\xi_b = 0$ für fast alle $b \in B$; die Darstellung ist eindeutig.
$I(x) = \sum_{b \in B} \delta_b \cdot \xi_b + \Phi(x)$.
Weil die δ_b linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind und nach Wahl von $\varepsilon \Rightarrow 0 \neq |\sum_{b \in B} \delta_b \cdot \xi_b| < \varepsilon$.
$\Rightarrow I(x) \neq 0$. Falls $x \in P$ ist $\Phi(x) > 0$, also auch $I(x) > 0$.
I stellt somit die verlangte Linearform dar.

⌛

Folgerung: Jede partielle Vektorraumordnung läßt sich zu einer totalen Vektorraumordnung erweitern. Man setze nur $x \succeq 0 :\Leftrightarrow I(x) \geqq 0$.

<u>Satz (2.4.4):</u>

V sei ein partiell geordneter Vektorraum, U ein Untervektorraum von V und $I : U \to \mathbb{R}$ eine positive Linearform.
Dann gibt es eine positive Linearform $J: V \to \mathbb{R}^\star$ mit $J|_U = I$.

Beweis:
Für $\varphi \in U/\mathrm{Kern}(I)$ definieren wir:
$\varphi \leq 0 :\Leftrightarrow$ es gibt $0 \geq x \in U$ mit $\bar{x} = \varphi$.
Diese Definition ist eindeutig; denn sei $\bar{x} = \bar{y}$ mit $x \geq 0$, $y \leq 0$. Wegen $0 \leq x, -y \leq x-y \in \mathrm{Kern}(I)$ müssen auch $x, y \in \mathrm{Kern}(I)$ sein, d.h. $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

I': $U/\text{Kern}(I) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $I'(\bar{x}) := I(x)$.
Wenn es eine positive Linearform J': $V/\text{Kern}(I) \to \mathbb{R}^*$ gibt, die I' fortsetzt, so ist mit $J(x) := J'(\bar{x})$ die verlangte Linearform auf V definiert.
Ohne Einschränkung sei daher I bereits als injektiv vorausgesetzt.
Ebenfalls ohne Einschränkung soll $x \leq y$ gelten, falls $x,y \in U$ und $I(x) < I(y)$. (Ansonsten könnte man $\leq$ einfach entsprechend erweitern.)

$M := \{x \in V \mid \text{es gibt } u \in U\colon 0 \leq x \leq u\}$.
=> Der von M erzeugte Vektorraum W umfaßt U, da wegen der Injektivität $I(u) < 0$ oder $I(-u) > 0$ für $0 \neq u \in U$.
$B \subset M$ sei Basis von W.
Für alle $w \in W$ gibt es $u \in U$ mit $-u \leq w \leq u$; denn sei $w = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot b_i$ mit $b_i \in B$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ => $\sum_{i=1}^{n} -|\xi_i| \cdot b_i \leq w \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot b_i$. Nach Def. von M gibt es zu jedem b_i ein $u_i \in U$, $b_i \leq u_i$. Ersetzt man in der Ungleichung die b_i durch die jeweiligen u_i, erhält man die gewünschte Aussage.

Def.: Φ: $W \to \mathbb{R}$: $\Phi(w) := \inf(I(x) \mid x \in U, w \leq x)$.
Für $\lambda \geq 0$ ist $\Phi(\lambda \cdot w) = \inf(I(x) \mid x \in U, \lambda \cdot w \leq x) =$
$= \inf(I(\lambda \cdot x) \mid \lambda \cdot x \in U, w \leq x) = \lambda \cdot \Phi(w)$.
$\Phi(v+w) = \inf(I(x) \mid x \in U, v+w \leq x) \leq \inf(I(x)+I(y) \mid x,y \in U, v \leq x, w \leq y) = \Phi(v) + \Phi(w)$.
Außerdem gilt $\Phi|_U = I$.
Nach dem Hahn/Banach-Satz gibt es daher eine Linearform J': $W \to \mathbb{R}$, die I fortsetzt und für die $J' \leq \Phi$ gilt.
$J'(w) \geq 0$ für $w \geq 0$.
Denn angenommen, $J'(w) < 0$. => $J'(-w) > 0$ => $\Phi(-w) > 0$.
Weil aber $-w \leq 0$, ist nach Def. von Φ $\Phi(-w) \leq 0$.
Widerspruch!

V/W werde durch $0 \leq \bar{x}$:<=> $0 \leq x$ partiell geordnet.

Diese Definition ist möglich, da aus $\bar{x} = \bar{y}$ $x \leq 0 \leq y$ folgt, daß $y-x \in W$ und $0 \leq y \leq y-x$ und daher (nach Def. von W) $y \in W$, mithin $\bar{y} = \bar{x} = 0$. $(V/W,\leq)$ ist wieder ein partiell geordneter Vektorraum.

Sei L die nach Satz (2.4.3) existierende positive, injektive Linearform $V/U \to \mathbb{R}^*$, wobei o.E. $\mathbb{R}^*$ κ-saturiert sei mit $\kappa > |V/W|$. Daher gibt es ein $c \in \mathbb{R}^*$, so daß $|c \cdot L(x)| \simeq \infty$ für alle $x \in V/W$, $x \neq 0$.

Def.: $J: V \to \mathbb{R}^* : J(x) := J'(w) + c \cdot L(\bar{x})$, wobei $x = w + v$ mit $w \in W$, $v \in W^{\perp}$ (eindeutig!).

J ist eine Linearform, die J' und damit auch I fortsetzt.

Sei $x \in V$, $x \geq 0 \Rightarrow \bar{x} \geq 0$.

1.Fall: $\bar{x} = 0 \Rightarrow x \in W \Rightarrow J'(x) = J(x) \geq 0$.

2.Fall: $\bar{x} \neq 0 \Rightarrow c \cdot L(\bar{x}) \simeq \infty \Rightarrow J(x) \geq 0$.

Also ist J positiv.

⌛

Satz (2.4.5):

$(V,\leq)$ sei partiell geordneter Vektorraum, U Untervektorraum von V und $I: U \to \mathbb{R}$ eine positive Linearform. Dann gibt es eine positive Linearform $J: V \to \mathbb{R}^*$, die injektiv ist und auf U fast mit I übereinstimmt.

Beweis:

J_1 sei die Linearform $V \to \mathbb{R}^*$ gemäß Satz (2.4.4) und J_2 diejenige gemäß Satz (2.4.3). O. E. nehmen J_1 und J_2 ihre Werte in demselben $\mathbb{R}^*$ an und $0 \simeq J_2(x) < y$ für alle $x \in V$ und $0 < y \in \text{Bild}(J_1)$.

Def.: $J: V \to \mathbb{R}^* : J(x) := J_1(x) + J_2(x)$.

$\Rightarrow$ J ist linear und positiv und stimmt auf U fast mit I überein.

Sei $J(x) = 0 \Rightarrow J_1(x) = -J_2(x) \Rightarrow J_1(x) = J_2(x) = 0$ $\Rightarrow x = 0$, weil J_2 injektiv.

Somit ist J auch injektiv.

⌛

Anwendungen:

a) Ω sei eine Menge, V := Abb(Ω,$\mathbb{R}$), U ein Untervektorraum von V und R eine Relation auf V.
$f \sim g$:<=> für alle feinsten R-invarianten Integrale $\int$ auf V ist $\int f = \int g$.

Ist I ein Integral auf U mit Werten in $\mathbb{R}$ und gilt I(f) = I(g) für $f \sim g$, so gibt es ein R-invariantes Integral $\int : V \to \mathbb{R}^*$, das auf U fast mit I übereinstimmt und für das gilt: $\int f = \int g \iff f \sim g$.

Beweis: W := $\{f \in U \mid f \sim 0\}$ ist ein UVR. Wende Satz (2.4.5) auf V/W an.

b) Voraussetzungen wie bei a), wobei $\Omega := \mathbb{R}$, $U := \mathcal{L}$, I := L-$\int$ und R durch Translationen und Spiegelungen auf $\mathfrak{M}$ (s.Def.2.2.1 b) gegeben seien.
Satz (2.2.2) liefert, daß für $f \sim g$ L-$\int f d\lambda$ = L-$\int g d\lambda$ ist. Somit kann L-$\int$ zu einem feinsten R-invarianten Integral auf allen reellen Funktion "fortgesetzt" werden (bis auf $\simeq$); d.h. die Vorgabe durch L-$\int$ beeinträchtigt die erreichbare Feinheit nicht.

⌛ ⌛ ⌛

L I T E R A T U R

1. BANACH, S., Sur le problème de la mesure. Fundamenta Mathematicae 4.1923, 7-33.

2. BANACH,S., Sur les transformations biuni-voques. Fundamenta Mathematicae 6.1924, 236-242.

3. BANACH, S., Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932.

4. BELL, J.L./A.B. SLOMSON, Models and Ultra-products. Amsterdam 1969.

5. BERNSTEIN, A.R./F. WATTENBERG, Nonstandard Measure Theory. In: W.A.J. LUXEMBURG, Hrsg., Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability. New York 1969.

6. BERNSTEIN, A.R./P.A. LOEB, A Nonstandard Integration Theory for Unbounded Functions. (Victoria Symposion on Nonstandard Analysis.) New York 1974.

7. BERNSTEIN, A.R., Nonstandard Integration Theory for Unbounded Functions. Zs. für Math. Logik u. Grundlagen der Math. 20.1974, 97-108.

8. BIERLEIN, D., Fortsetzung von Wahrscheinlich-keitsmaßen. Zs. für Wahrscheinlichkeitstheo-rie 1.1962, 28-46.

9. BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques. Paris 1967.

10. CHANG, C.C./H.J. KEISLER, Model Theory. Amster-dam 1973.

11. FUCHS, L., Partially Ordered Algebraic Systems. Budapest 1963.

12. GREENLEAF, F.P., Invariant Means on Topological Groups and Applications. New York 1969.

13. HAHN, H., Über nichtarchimedische Größensysteme. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaf-ten 116.1907, 601-655.

14. HAHN, H./A. ROSENTHAL , Set Functions. Albuquer-que 1948.

15. HALMOS, P.R., Measure Theory. New York 1950.

16. HARTMANN, S./J. MIKUSIŃSKI, The Theory of Lebesgue Measure and Integration. Warschau 1961.

17. HAUSNER, M., On a Nonstandard Construction of Haar-Measure. Comm. of Pure and Applied Mathematics 25.1972, 403-405.

18. HÖNIG, B., Nonstandardmodelle der Typenlogik. Diplomarbeit am Math. Institut der Univ. München 1978.

19. KIRK, R.B., The Haar-Integral via Nonstandard Analysis. Pacific J. of Mathematics 58.1975, 517-527.

20. KÖNIG, D., Sur les correspondances multivoques des ensembles. Fundamenta Math. 8.1926, 114-134.

21. LIGHTSTONE, A.H./A. ROBINSON, Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions. Amsterdam 1975.

22. LOEB, P., Conversion from Nonstandard to Standard Measure Space and Applications to Probability Theory. Transactions AMS 211.1975, 113 bis 122.

23. LUXEMBURG, W.A.J., Hrsg., Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability. New York 1969.

24. LUXEMBURG, W.A.J./A. ROBINSON, Hrsg., Contributions to Nonstandard Analysis. Amsterdam 1972.

25. MAHARAM, D., Algebraic Characterisation of Measure Algebras. Ann. Math. 48.1947, 154-167.

26. NEUMANN, J. von, Zur allgemeinen Maßtheorie. Fundamenta Mathematicæ 13.1929, 73-116.

27. OHBA, S., Topological Group Valued Measures. Yokohama Math. J. 21.1973, 101-104.

28. OSSWALD, H., Einführung in die Nonstandard Analysis. Vorlesungsskriptum. Math. Institut der Univ. München 1977.

29. OXTOBY, J.C., Maß und Kategorie. Berlin 1970.

15. HALMOS, P.R., Measure Theory. New York 1950.

16. HARTMANN, S./J. MIKUSIŃSKI, The Theory of Lebesgue Measure and Integration. Warschau 1961.

17. HAUSNER, M., On a Nonstandard Construction of Haar-Measure. Comm. of Pure and Applied Mathematics 25.1972, 403-405.

18. HÖNIG, B., Nonstandardmodelle der Typenlogik. Diplomarbeit am Math. Institut der Univ. München 1978.

19. KIRK, R.B., The Haar-Integral via Nonstandard Analysis. Pacific J. of Mathematics 58.1975, 517-527.

20. KÖNIG, D., Sur les correspondances multivoques des ensembles. Fundamenta Math. 8.1926, 114-134.

21. LIGHTSTONE, A.H./A. ROBINSON, Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions. Amsterdam 1975.

22. LOEB, P., Conversion from Nonstandard to Standard Measure Space and Applications to Probability Theory. Transactions AMS 211.1975, 113 bis 122.

23. LUXEMBURG, W.A.J., Hrsg., Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability. New York 1969.

24. LUXEMBURG, W.A.J./A. ROBINSON, Hrsg., Contributions to Nonstandard Analysis. Amsterdam 1972.

25. MAHARAM, D., Algebraic Characterisation of Measure Algebras. Ann. Math. 48.1947, 154-167.

26. NEUMANN, J. von, Zur allgemeinen Maßtheorie. Fundamenta Mathematicæ 13.1929, 73-116.

27. OHBA, S., Topological Group Valued Measures. Yokohama Math. J. 21.1973, 101-104.

28. OSSWALD, H., Einführung in die Nonstandard Analysis. Vorlesungsskriptum. Math. Institut der Univ. München 1977.

29. OXTOBY, J.C., Maß und Kategorie. Berlin 1970.

31. ROBINSON, A., Nonstandard Analysis. Amsterdam 1966.

32. SHORB, A.McK., Completely Additive Measure and Integration. Proceedings AMS 53.1975, 453-459.

33. SION, M., A Theory of Semigroup Valued Measures. Berlin 1973.

34. SKALA, H.J., Non-Archimedean Utility Theory. Dordrecht 1975.

35. ULAM, S., Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fundamenta Mathematicae 16.1930, 140-150.

36. WEBB,S.M., Nonstandard Probability. Notre Dame J. of Formal Logic, 16.1975, 397-401.

37. ZAKON, E., Integration of Non-Measurable Functions I. Canadian Math. Bull. 9.1966, 307-330.

38. ZAKON, E., Integration of Non-Measurable Functions II.Canadian Math. Bull. 17.1974,587-592.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 8. Februar 1949.

Geburtsort: München.

Schulbildung: 1955-1959 Volksschule Holzkirchen,
1959-1961 Hum. Gymnasium Ingolstadt,
1961-1968 Hum. Gymnasium Tegernsee,
1968 Abitur ebenda.

Studium: 1970-1976 Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.
1976-1978 Musikwissenschaften ebenda.

Abschlußprüfung: 1976 Diplom in Mathematik.

Berufliche Tätigkeiten: 1968-1970 Wehrdienst;
1971-1977 nebenberufliche, seit 1978 hauptberufliche Tätigkeit im Bereich der Datenverarbeitung.

Personenstand: Verheiratet; drei Kinder.

Christian [illegible].